Equações do 1º Grau

Equação é uma igualdade entre duas expressões onde figura, pelo menos, uma variável (incógnita). Chama-se **solução** ou **raiz** de uma equação a qualquer valor que se atribua à incógnita e transforme a equação numa afirmação verdadeira.

Notação/Designação

- **1º Membro** – é a expressão que está à esquerda do sinal "=";
- **2º Membro** – é a expressão que está à direita do sinal "=";
- **Termos** – são as parcelas que constituem os membros da equação;
- **Incógnitas** – são as "letras" que aparecem nos vários termos;
- **Termos independentes**– são os termos constantes ou que não dependem da incógnita presente na equação;
- **Soluções** – são os valores da(s) incógnita(s) que transformam a equação numa afirmação (proposição) verdadeira.
- **Equações equivalentes** – duas ou mais equações dizem-se equivalentes se admitem a(s) mesma(s) solução(ões). Entre equações equivalentes utiliza-se o símbolo "$\Leftrightarrow$".
- **Conjunto Solução** – é o conjunto formado por todas as soluções da equação.

Exemplo

Na equação $4x - 5 = 10 + x$, podemos identificar:

- A incógnita: ____________
- 1º Membro: ____________ - 2º Membro: ____________
- Termos do 1º Membro: ____________________
- Termos do 2º Membro: ____________________
- Termos independentes: ____________________
- Solução: "5" uma vez que "$4 \times 5 - 5 = 10 + 5$" é uma proposição verdadeira

Se adicionarmos a ambos os membros de uma equação a mesma quantidade (ou expressão) obtemos uma equação equivalente à equação dada.

Se $a = b$ então $a + c = b + c$, $\forall c \in \mathbb{R}$

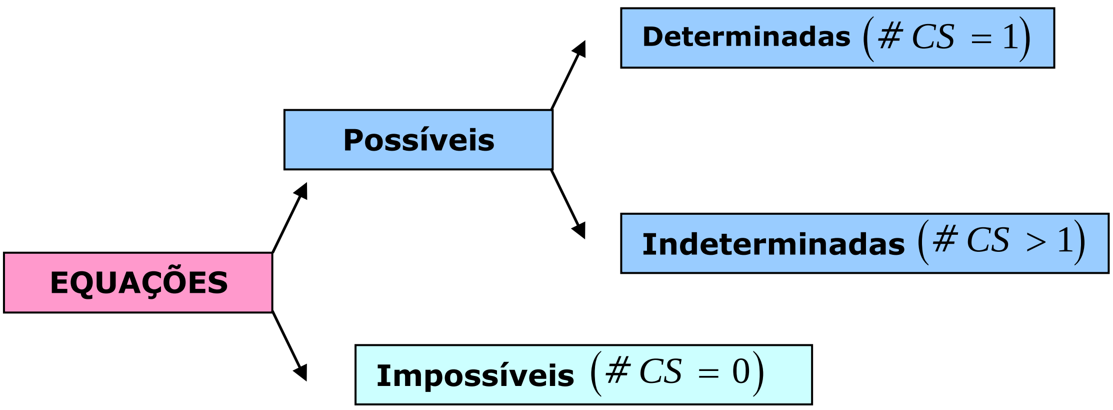
Se multiplicarmos ambos os membros de uma equação por uma quantidade (ou expressão) não nula obtemos uma equação equivalente à equação dada.

Se $a = b$ então $a.c = b.c$, $\forall c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Resolução

Procedimento Formal	Regra Prática	Equação - Exemplo
Remover os parêntesis da equação, aplicando a propriedade distributiva	"desembaraçar" de parêntesis	(**PF**) e (**RP**) $\frac{3x}{4}+3=\frac{2x-2}{6}$
Multiplicar os membros da equação pelo *mmc* dos denominadores das frações aí presentes	Reduzir todos os termos da equação (nos dois membros) ao mesmo denominador, recorrendo preferencialmente ao seu *mmc*, eliminando os denominadores.	(**PF**) $12\left(\frac{3x}{4}+3\right)=12\left(\frac{2x-2}{6}\right) \Leftrightarrow 9x+36=4x-4$ (**RP**) $\underset{(3)}{\frac{3x}{4}}+\underset{(12)}{3}=\underset{(2)}{\frac{2x-2}{6}} \Leftrightarrow 9x+36=4x-4$
Adicionar a ambos os membros o(s) simétrico(s) dos termos: em " x " ,presentes no 2º membro e independentes, do 1º membro. Adicionar os termos semelhantes	Passar os termos em " x " do 2º para o 1º membro e os termos independentes do 1º para o 2º membros trocando-lhe o sinal. Adicionar os termos semelhantes.	(**PF**) $(-4x)+9x+\underbrace{36+(-36)}_{=0}=\underbrace{(-4x)+4x}_{=0}-4+(-36)$ $\Leftrightarrow 5x=-40$ (**RP**) $9x-4x=-4-36 \Leftrightarrow 5x=-40$
Multiplicar ambos os membros pelo inverso do coeficiente de " x " (não nulo). Simplificar, se possível, o resultado obtido	Dividir ambos os membros pelo coeficiente de " x " (não nulo)	(**PF**) $\underbrace{\frac{1}{5}\times 5}_{=1}x=\frac{1}{5}\times(-40) \Leftrightarrow x=-\frac{40}{5} \Leftrightarrow x=-8$ (**RP**) $x=\frac{-40}{5} \Leftrightarrow x=-8$
O conjunto solução desta equação resolvida é: $CS=\{-8\}$		

Classificação de Equações



Exemplos

Resolver, em IR, se possível as seguintes equações:

1. $4(x-1)=7+4x \Leftrightarrow$

Condição/Equação ________________________, $CS=$________________

2. $4\left(x-\frac{1}{2}\right)=2(2x-1) \Leftrightarrow$

Condição/Equação ________________________, $CS=$________________

3. $2(x-3)=\frac{7}{2}+4x \Leftrightarrow$

Condição/Equação ________________________, $CS=$________________

Inequações do 1º Grau

Se numa equação substituirmos o sinal de igualdade (=) por qualquer um dos sinais de desigualdade $(<,\leq,>,\geq)$, obtemos uma condição que se designa por inequação. Então:

Inequação é uma desigualdade onde figuram uma ou mais variáveis.

As designações genéricas são idênticas às que foram apresentadas para as equações: Membros, termos, incógnita, etc.

Tal como com as equações, existem operações que se podem efetuar sobre os membros de uma inequação e que garantem a equivalência entre a anterior e a "nova" inequação:

- Se adicionarmos a ambos os membros de uma inequação a mesma quantidade (ou expressão) obtemos uma inequação equivalente à inequação dada.

  Se $a<b$ então $a+c<b+c$, $\forall c \in \mathbb{R}$

- Se multiplicarmos ambos os membros de uma inequação por uma quantidade (ou expressão) positiva obtemos uma inequação equivalente à inequação dada.

  Se $a<b$ então $a.c<b.c$, $\forall c \in \mathbb{R}^+$

- Se multiplicarmos ambos os membros de uma inequação por uma quantidade (ou expressão) negativa obtemos uma inequação equivalente à inequação dada, se efetuarmos a troca de sinal "<" por ">" (ou ">" por "<").

  Se $a<b$ então $a.c>b.c$, $\forall c \in \mathbb{R}^-$

OBSERVAÇÃO

Recordando que a expressão $a < b$ é equivalente à expressão $b > a$, não será compreender o último resultado na página anterior. Se na inequação:

$$-x < 4$$

"passarmos" o "4" para o 1º membro e o x para o segundo, estes "trocam de sinal" (consequência de (1), adicionando a ambos os membros os respetivos elementos simétricos), temos

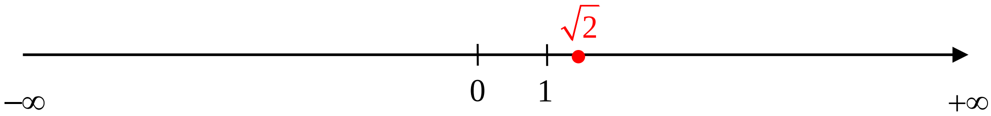
$$-4 < x$$

que, pelo resultado acima referido (isto é, lendo da direita para a esquerda) é o mesmo que escrever

$$x > -4$$

Intervalos em $\mathbb{R}$

Um número real é, usualmente representado por um ponto numa reta orientada que se designa por reta real, atendendo ao "zero" e à unidade predefinida.



A uma igualdade corresponde um ponto na reta, enquanto que a uma desigualdade corresponde, usualmente, uma infinidade de "pontos", que se traduzem numa representação de intervalos de números reais.

Sendo c_1 uma condição á qual corresponde um conjunto CS_1, podemos referir:

Conjunção de Condições – Intersecção de Conjuntos

A conjunção de condições é uma nova condição. Para que um elemento a verifique é necessário que verifique simultaneamente as duas condições.

Conjunção das condições c_1 e c_2

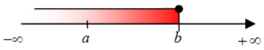
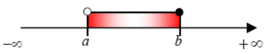
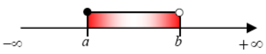
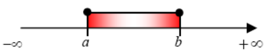
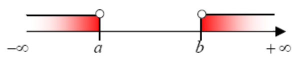
- Em linguagem corrente "c_1 e c_2" - Em linguagem matemática "$c_1 \wedge c_2$"
- À conjunção de condições corresponde a intersecção dos respetivos conjuntos solução. Simbolicamente:

  Se $\{x : c_1\} = CS_1$ e $\{x : c_2\} = CS_2$ então $\{x : c_1 \wedge c_2\} = CS_1 \cap CS_2$

Disjunção de Condições – Reunião de Conjuntos

- A disjunção de condições é uma nova condição. Para que um elemento a verifique é necessário que verifique pelo menos uma das duas condições.
- **Disjunção das condições c_1 e c_2**
  - Em linguagem corrente "c_1 ou c_2" - Em linguagem matemática "$c_1 \vee c_2$"
  - À conjunção de condições corresponde a reunião dos respetivos conjuntos solução. Simbolicamente:

    Se $\{x : c_1\} = CS_1$ e $\{x : c_2\} = CS_2$ então $\{x : c_1 \vee c_2\} = CS_1 \cup CS_2$

Condição	Conjunto	Intervalo	Representação Geométrica
$x > a$	$\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$	(1) $]a, +\infty[$	
$x \geq a$	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$	(2) $[a, +\infty[$	
$x < b$	$\{x \in \mathbb{R} : x < b\}$	(3) $]-\infty, b[$	
$x \leq b$	$\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$	(4) $]-\infty, b]$	
$x > a \wedge x < b$ $a < x < b$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	(1) ∩ (3) $]a, b[$	
$x > a \wedge x \leq b$ $a < x \leq b$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	(1) ∩ (4) $]a, b]$	
$x \geq a \wedge x < b$ $a \leq x < b$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	(2) ∩ (3) $[a, b[$	
$x \geq a \wedge x \leq b$ $a \leq x \leq b$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	(2) ∩ (4) $[a, b]$	
$x < a \wedge x > b$	$\{x \in \mathbb{R} : x < a \wedge x > b\}$	$\overline{(2)} \cap \overline{(4)}$ $\varnothing$	
$x < a \vee x > b$	$\{x \in \mathbb{R} : x < a \vee x > b\}$	$]-\infty, a[$ $\cup$ $]b, +\infty[$	
$x > a \vee x < b$	$\{x \in \mathbb{R} : x > a \vee x < b\}$	(2) ∪ (4) $\mathbb{R}$	

Exemplos

Resolver, em IR, se possível as seguintes inequações:

1. $4(x-1) \geq 10 + 2x \Leftrightarrow$

Condição _________________________, $CS =$______________________________

2. $3x - 6 < 3(x-5) \Leftrightarrow$

Condição/Equação ____________________________, $CS =$___________________

3. $3x - 6 < 3(x+5) \Leftrightarrow$

Condição/Equação ____________________________, $CS =$___________________

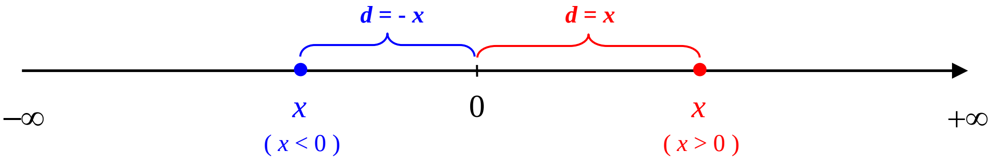
4. $\dfrac{2(x-1)}{3} \geq 2x - 5 \Leftrightarrow$

Condição ____________________________, $CS =$___________________

Módulo ou Valor Absoluto

Módulo, ou valor absoluto, de um qualquer número real, representa a distância deste (ponto que o representa na reta real) à origem, assim:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$$



Propriedades

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x.y| = |x|.|y|$
- $|-x| = |x|$
- $|x|^2 = x^2$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, y \neq 0$
- $|x| = m \Leftrightarrow x = m \vee x = -m, \quad \forall m > 0$
- $|x| > m \Leftrightarrow x > m \vee x < -m, \quad \forall m > 0$
- $|x| < m \Leftrightarrow x > -m \wedge x < m \Leftrightarrow -m < x < m, \quad \forall m > 0$

Observações As condições

$|x| < m$ ou $|x| \leq m$ para $m < 0$ são <u>impossíveis</u> $\left(CS = \{\ \}\right)$

$|x| > m$ ou $|x| \geq m$ para $m < 0$ são <u>universais</u> $\left(CS = \mathbb{R}\right)$

Exemplos

Resolver, em IR, se possível as seguintes condições:

1. $|2x-3| = 5 \Leftrightarrow$

Condição ________________________, $CS =$ _____________________________

2. $|x-3| < 2 \Leftrightarrow$

Condição/Equação __________________________, $CS =$ _________________

3. $|6x-8| \geq -5 \Leftrightarrow$

Condição/Equação __________________________, $CS =$ _________________

4. $\left|x - \dfrac{2}{3}\right| \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

Condição __________________________, $CS =$ _________________

Fonte: Filomena Soares e Cláudia Maia – 2007 - *Apontamentos de C.C.M. – Lic. em Educação Básica – ESE/IPP*