# Sistemas de Equações

**Sistema** de duas equações a duas incógnitas é a <u>conjunção de duas equações</u> onde figuram duas incógnitas. Usualmente estes sistemas são representados, através da "junção" das duas equações por uma chaveta à esquerda das mesmas.

Diz-se que um sistema está na **forma canónica** quando se apresenta sob a forma:

$$\begin{cases} a_1.x + b_1.y = c_1 \\ a_2.x + b_2.y = c_2 \end{cases} \text{ onde } a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$$

Os pares ordenados $(x, y)$ (com $x, y \in \mathbb{R}$), que satisfazem as equações do sistema designam-se por **soluções do sistema**.

Passamos de um sistema para outro equivalente quando:

- Um expressão ou equação é substituída por outra equivalente;
- É trocada a ordem das equações;
- Um múltiplo de uma equação é adicionado a outra equação.

O **método de substituição**, para a resolução de sistemas, é baseado na primeira das proposições anteriores, e descrevemo-lo, de um modo muito resumido, no quadro seguinte, acompanhado da resolução de um sistema exemplificativo.

| Procedimento | Exemplo |
|---|---|
| Resolva uma das equações em ordem a uma das variáveis (isolando-a num dos membros da equação escolhida. | $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ - \end{cases}$ |
| Substitua, na outra equação, essa incógnita pela expressão obtida anteriormente. | $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2(3 - 2y) - 3y = 4 \end{cases}$ |
| Obtém-se uma equação onde apenas figura uma incógnita. Resolve-se essa equação, determinando-se o valor dessa incógnita. | $\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 6 - 4y - 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ -7y = -2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ y = \frac{2}{7} \end{cases}$ |
| Substitui-se o valor encontrado anteriormente na outra (ou numa das equações originais do sistema) para encontrar o valor da outra incógnita | $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2\left(\frac{2}{7}\right) \\ y = \frac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{7} \\ y = \frac{2}{7} \end{cases}$ |

## 🕮 Classificação de Sistemas

Analogamente às equações do 1º grau, os sistemas podem ser classificados em função da(s) sua(s) soluções (pares ordenados de números).

Se um sistema admite, pelo menos, uma solução diz-se que é **possível** e se não admite qualquer solução diz-se **impossível**. No entanto, se a solução não é única o sistema diz-se **possível indeterminado**. Se admite apenas uma solução (par ordenado) ele diz-se **possível determinado**.

O esquema seguinte é idêntico ao apresentado para as equações, no entanto chamamos à atenção para o facto de quando referimos, por exemplo, $\#CS=1$ estamos a referir a unicidade de uma solução que é um par ordenado de valores reais (usualmente, $(x,y)$ ).

- **SISTEMAS**
  - **Possíveis**
    - **Determinados** $(\#CS=1)$
    - **Indeterminados** $(\#CS>1)$
  - **Impossíveis** $(\#CS=0)$

**Exemplo**

Resolver, em IR, se possível os seguintes sistemas de equações:

**1.** $\begin{cases}6x-3y=2\\-2x+y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\\y=1+2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6x-3(1+2x)=2\\y=1+2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6x-3-6x=2\\-\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\boxed{0y=5} \leftarrow \text{Eq.Impossível}\\-\end{cases} \Rightarrow CS=\varnothing$

**2.** $\begin{cases}6x-3y=3\\-2x+y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\\y=-1+2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6x-3(-1+2x)=3\\y=-1+2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6x+3-6x=3\\-\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\boxed{0x=0} \leftarrow \text{Eq.possível}\\ \text{para qualquer valor de } x\\-\end{cases} \Rightarrow CS=\{(x,y):y=-1+2x\}$

**3.** $\begin{cases}2x-3y=3\\x+y=-1\end{cases}$

# Interpretação e Resolução de Problemas

De um modo muito resumido, podemos dizer que as etapas fundamentais na resolução de um qualquer problema são as seguintes:

1. **Compreender o Problema**
   Ler com atenção o enunciado e identificar os dados e o que é pedido.
2. **Identificar as incógnitas** e representá-las simbolicamente (por letras)
3. **Traduzir em linguagem matemática as condições do problema** (equações, inequações, sistemas, etc).
4. **Resolver as condições "construídas"**
5. **Verificar se as soluções obtidas podem ser soluções do problema**
6. **Responder ao problema proposto.**

Para uma abordagem mais formal à resolução de problemas, podemos referir dois autores, George Polya e Miguel de Guzmán, com um trabalho intenso nesta área. Assim apresentamos, seguidamente, um resumo das estratégias apresentadas por George Polya em "*A arte de resolver problemas*" e por Miguel de Guzmán em "*Aventuras Matemáticas*" para a resolução geral de problemas.

**George Polya - *A Arte de Resolver Problemas***

| Como Resolver um Problema | |
|---|---|
| | **COMPREENSÃO DO PROBLEMA** |
| **Primeiro**<br>É preciso compreender o problema | Qual é a incógnita?<br>Quais são os dados?<br>Quais são as condições?<br>É possível satisfazer as condições? As condições são suficientes para determinar a(s) incógnita(s)? Ou são insuficientes? Ou redundantes? Ou contraditórias?<br>Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes das condições. É possível anotá-las? |

| | |
|---|---|
| | **ESTABELECER UM PLANO** |
| **Segundo**<br>Encontre a conexão entre os dados e a(s) incógnita(s). É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar a um plano para a resolução. | Já o viu antes?<br>Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?<br>Conhece um problema do mesmo tipo ou sobre o mesmo assunto?<br>Conhece um problema que lhe poderia ser útil?<br>Considere a incógnita! E procure pensar num problema do mesmo tipo que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.<br>Eis um problema do mesmo tipo e já resolvido anteriormente.<br>É possível utilizá-lo?<br>É possível utilizar o seu resultado?<br>É possível utilizar o seu método?<br>Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?<br>É possível reformular o problema?<br>É possível reformulá-lo ainda de outra maneira?<br>Volte às definições. Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema do mesmo tipo.<br>É possível imaginar um problema parecido mais acessível?<br>Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema?<br>Mantenha apenas uma parte das condições, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si? Utilizou todos os dados? Utilizou todas as condições? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema? |
| | **EXECUÇÃO DO PLANO** |
| **Terceiro**<br>Execute o seu plano. | Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo.<br>É possível verificar claramente que o passo está correcto?<br>É possível demonstrar que ele está correcto? |
| | **RETROSPECTIVA** |
| **Quarto**<br>Examine a solução obtida | É possível verificar o resultado?<br>É possível verificar o argumento?<br>É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?<br>É possível perceber isto rapidamente?<br>É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema? |

Adaptado da compilação disponibilizada *on line* por Joaquim Pinto

Financiado pela União Europeia NextGenerationEU