Expressões Polinomiais – Expressões Algébricas

Não apresentaremos aqui a definição matemática de polinómio pois esta ultrapassa os objetivos a que nos propusemos com este texto. No entanto, podemos dizer, sem comprometer a correção científica de tal definição, que uma **expressão polinomial** ou **polinómio**, em x, é a soma de parcelas do tipo $a.x^n$, onde a é um número real e n um número natural. Assim temos, genericamente um polinómio representado por:

$$a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} + \ldots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0, \quad a_{i\,(i=0,1,2,\ldots,n)} \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Notação/Designação

- Este polinómio diz-se de **grau não superior a *n***. Se se tiver $a_n \neq 0$ então o polinómio é de **grau *n***.
- Cada parcela do polinómio designa-se por **termo**.
- Cada termo $a_i x^i$ de um polinómio é formado pela **parte literal** x^i e pelo respetivo **coeficiente** a_i, e designa-se por **termo de grau *i***.
- Dois termos de dizem-se **semelhantes** se tiverem a mesma parte literal.
- Um **polinómio constante**, isto é, formado apenas pelo **termo independente** a_0, é um polinómio de grau zero.

Operações entre polinómios

Adição e Subtração de Polinómios

Na adição e subtração de polinómios só se podem adicionar termos semelhantes. A operação efetua-se tomando a parte literal (que é a igual) e adicionando ou subtraindo os respetivos coeficientes.

Exemplo

$$\left(6x^3 - 2x^2 + 3x + 1\right) + \left(2x^3 + 2x^2 + x - 5\right) = \ldots$$

Multiplicação de Polinómios

Para efetuarmos o produto de polinómios recorremos à propriedade distributiva generalizada, procedendo, seguidamente à adição de termos semelhantes, caso existam. Não esquecer que o produto de um termo de grau k por um termo de grau r é um termo de grau $k + r$ (regras do produto de potências com a mesma base).

Exemplo

$\left(2x^2+3x-2\right).\left(-x+1\right)=\ldots$

Produtos Notáveis ou Casos Notáveis

- Quadrado de uma soma ou diferença: $\left(x\pm a\right)^2=x^2\pm 2ax+a^2$
- Diferença de quadrados: $x^2-a^2=\left(x-a\right)\left(x+a\right)$

podemos ainda acrescentar de modo a "contornar" alguns cálculos :

- $\left(x+a\right)\left(x+b\right)=x^2+(a+b)x+a.b$

ATENÇÃO

Tendo em vista os casos notáveis referidos não devemos esquecer que, em geral,

$$\left(x+a\right)^2\neq x^2+a^2$$

$$\left(x+a\right)^n\neq x^n+a^n,\quad n>1$$

Com a frase "em geral $\left(x+a\right)^2\neq x^2+a^2$" queremos dizer que $\left(x+a\right)^2=x^2+a^2$ não é uma identidade, ou seja, não vale quaisquer que sejam x e a reais, sendo óbvio que vale para $x = 0$.

Exemplos

1. $\left(x+3\right)^2=x^2+2.x.3+3^2=x^2+6x+9$
2. $\left(x-3\right)^2=$ ……………………………………………………...
3. $\left(1-x\right)^2=$ ……………………………………………………...
4. $\left(1-x\right)\left(1+x\right)=1^2-x^2=1-x^2$
5. $\left(3-2x\right)\left(3+2x\right)=$ ……………………………………………...

☞ Observações

Chama-se conjugado de um binómio (polinómio com apenas dois termos) a um outro binómio que tem o primeiro termo igual e o segundo simétrico ao binómio dado, isto é, dado o binómio $\left(a+b\right)$ o seu conjugado é $\left(a-b\right)$ e vice-versa. O conjugado de uma expressão irracional é utilizado para a **Racionalização de expressões numéricas.**

Quando um radical aparece no denominador de uma fração, é conveniente transformar a fração numa fração equivalente, mas sem radicais no denominador. A esta transformação dá-se o nome de **racionalização do denominador**.

Exemplos

Racionalizar os denominadores das seguintes expressões irracionais:

$$\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}+1}=\frac{1\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{\sqrt{5}-1}{\left(\sqrt{5}\right)^2-1^2}=\frac{\sqrt{5}-1}{5-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$ (regra do conjugado)

$$\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}=$$

Divisão de Polinómios

Sendo $A(x)$ e $B(x)$, com $B(x)\neq 0$, dois polinómios em x de coeficientes reais, tais que grau $A(x)\geq$ grau $B(x)$, então existem unicamente dois polinómios $Q(x)$ e $R(x)$, com grau $R(x)<$ grau $Q(x)$, tais que:

$$A(x)=B(x).Q(x)+R(x)$$ <u>Identidade Fundamental da divisão</u>

onde $Q(x)$ e $R(x)$ se designam, respetivamente, por <u>quociente</u> e <u>resto</u> da divisão de $A(x)$ (dividendo) por $B(x)$ (divisor).

Assim, a Identidade Fundamental da divisão pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{A(x)}{B(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{B(x)}.$$

Algoritmo da divisão

Exemplo: $\dfrac{3x+6x^3+1}{x^2-x+1}$

<u>Como Proceder:</u>

- Averiguar se o grau do numerador é superior ou igual ao do numerador, ou seja, se é possível efetuar a divisão
- Ordenar segundo as potências decrescentes de x os termos do numerador e do denominador:
  - $6x^3+3x+1$
  - x^2-x+1
- Considerar "0" como o coeficiente das potências de x que não aparecem
  - $6x^3+0x^2+3x+1 \;\big|\; \underline{x^2-x+1}$

- Efetuar a divisão até obter um resto com grau inferior a $x^2 - x + 1$:

  ○
$$\begin{array}{r|l} 6x^3 + 0x^2 + 3x + 1 & x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2} -6x^3 + 6x^2 - 6x & 6x + 6 \\ \cline{1-1} +6x^2 - 3x + 1 & \\ -6x^2 + 6x - 6 & \\ \cline{1-1} +3x - 5 & \end{array}$$

- A divisão anterior permite escrever que

$$\frac{6x^3 + 3x + 1}{x^2 - x + 1} = 6x + 6 + \frac{3x - 5}{x^2 - x + 1}, x^2 - x + 1 \neq 0$$

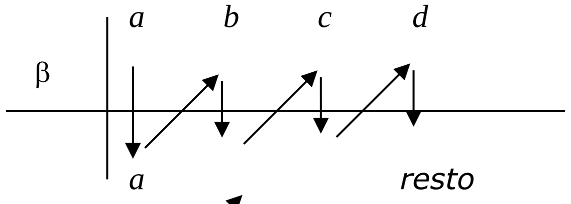
Exemplo

Efetue a seguinte divisão de polinómios: $\dfrac{2x^4 + x^3 + x}{x^3 + 1}$

<u>Regra de Ruffini ou divisão sintética</u>

Esta regra prática utiliza-se quando o divisor é um binómio da forma $x\text{-}\beta$.

Para dividir, por exemplo, $ax^3 + bx^2 + cx + d$ pelo binómio $x\text{-}\beta$ procede-se da forma que se apresenta esquematicamente de seguida:



Onde $\downarrow$ representa adicionar e $\nearrow$ multiplicar por β.

Exemplo

Utilize a regra de Ruffini para efetuar a seguinte divisão: $\dfrac{2x^4 + x^3 + x}{x + 1}$