EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Um **polinómio do segundo grau** pode ser representado genericamente por:

$$ax^2 + bx + c$$

onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$. Quando $b = 0$ ou $c = 0$ o polinómio diz-se **incompleto**. Assim, podemos definir:

📖 **Equação do segundo grau** ou **equação quadrática**

é uma equação que pode ser colocada sob a forma (canónica)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$.

Quando $b = 0$ ou $c = 0$ a equação diz-se incompleta.

Resolução de equações do segundo grau incompletas

Relativamente às **equações quadráticas incompletas** ($a \neq 0$) temos dois casos a distinguir:

- $c = 0$: $ax^2 + bx = 0$ - Esta equação tem sempre solução

$$x(ax+b) = 0 \underset{\substack{\text{Lei do Anulamento} \\ \text{do produto}}}{\Leftrightarrow} x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$$

- $b = 0$: $ax^2 + c = 0$ - Esta equação nem sempre tem solução:

  Se a e c têm sinais contrários, a equação é possível e tem duas soluções;

  Se a e c têm o mesmo sinal, a equação é impossível;

  Se $c = 0$ a equação possui apenas uma solução: $x = 0$

Exemplo

A equação $2x^2 - 8 = 0$ tem duas soluções:

$$2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

No entanto, a equação $2x^2 + 8 = 0$ não tem solução: $2x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$

o que é impossível uma vez que $x^2 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Resolva a equação: $2x^2 = 8x$

Resolução de equações do segundo grau completas

Para resolvermos, em ordem a x, uma equação do segundo grau completa:

$$ax^2+bx+c=0 \quad \text{onde} \quad a,b,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Recorremos, usualmente, à conhecida:

Fórmula Resolvente

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

para $a\neq 0$ e $b^2-4ac\geq 0$.

A expressão que figura na raiz quadrada da fórmula resolvente: b^2-4ac, representa-se usualmente pela letra grega maiúscula "Δ" (que se lê *delta*) e designa-se por **binómio discriminante**. O "sinal" do binómio discriminante ($\Delta=b^2-4ac$) caracteriza as soluções destas equações:

- Se $\Delta<0$ a equação é impossível em $\mathbb{R}$, isto é, o polinómio do segundo grau não tem zeros reais, uma vez que, em $\mathbb{R}$, não existem raízes quadradas de números negativos.
- Se $\Delta=0$ a equação é possível e admite apenas uma solução.
- Se $\Delta>0$ a equação é possível e admite duas soluções reais distintas.

Exemplo

Resolver, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações:

1. $x^2-5x+6=0$

Resolução Identificam-se os seguintes coeficientes: $a=1, b=-5 \; e \; c=6$

Como $\Delta=(-5)^2-4\times1\times6=25-24=1(>0)$, a equação é possível e terá duas soluções reais distintas. Assim, utilizando a fórmula resolvente,

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times6}}{2\times1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{5+1}{2}\vee x=\frac{5-1}{2}\Leftrightarrow x=3\vee x=2$$

$CS=\{2,3\}$

2. $2x^2-4x+2=0$

Resolução Identificam-se os seguintes coeficientes : $a=\ldots, b=\ldots \; e \; c=\ldots$

Como $\Delta=\ldots\ldots\ldots\ldots$, a equação é .... e terá .... Assim, utilizando a fórmula resolvente,

$x=\ldots\ldots$ $\qquad CS=\ldots\ldots\ldots$

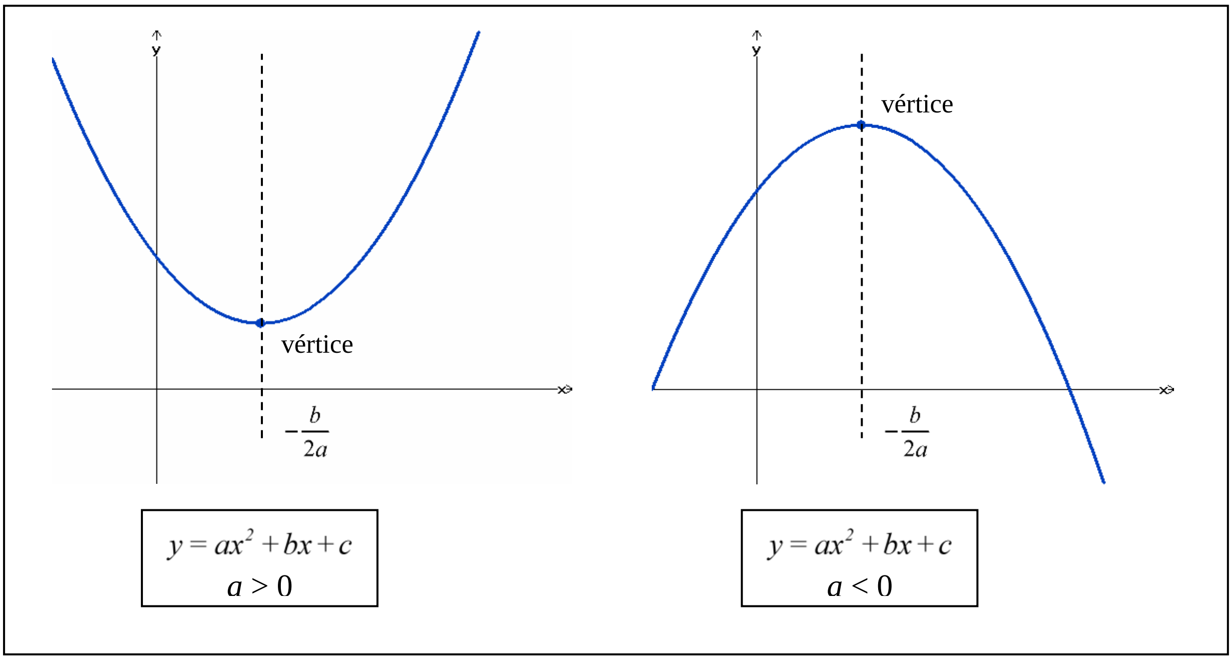
3. $x^2+3x+5=0$

Resolução Identificam-se os seguintes coeficientes $a=\ldots, b=\ldots \; e \; c=\ldots$

Como $\Delta=\ldots\ldots\ldots\ldots$, a equação é .... e terá ....

Representação geométrica

Uma equação da forma: $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ designa-se por **equação quadrática** ou **do segundo grau** em x. A sua representação geométrica é uma **parábola** que, dependendo do facto de a ser positivo ou negativo, tem uma das formas ilustradas na figura seguinte.



Em ambos os casos a parábola é simétrica relativamente a uma reta vertical, paralela ao eixo das ordenadas (Oy). Este eixo de simetria "corta" a parábola num ponto designado por **vértice**. Se $a > 0$ o vértice é o ponto mais baixo da curva e se $a < 0$ o vértice é o ponto mais alto.

☞ Observações

- Se $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$ a parábola tem a **concavidade voltada para cima** (ri!).
- Se $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$ a parábola tem a **concavidade voltada para baixo** (chora…).

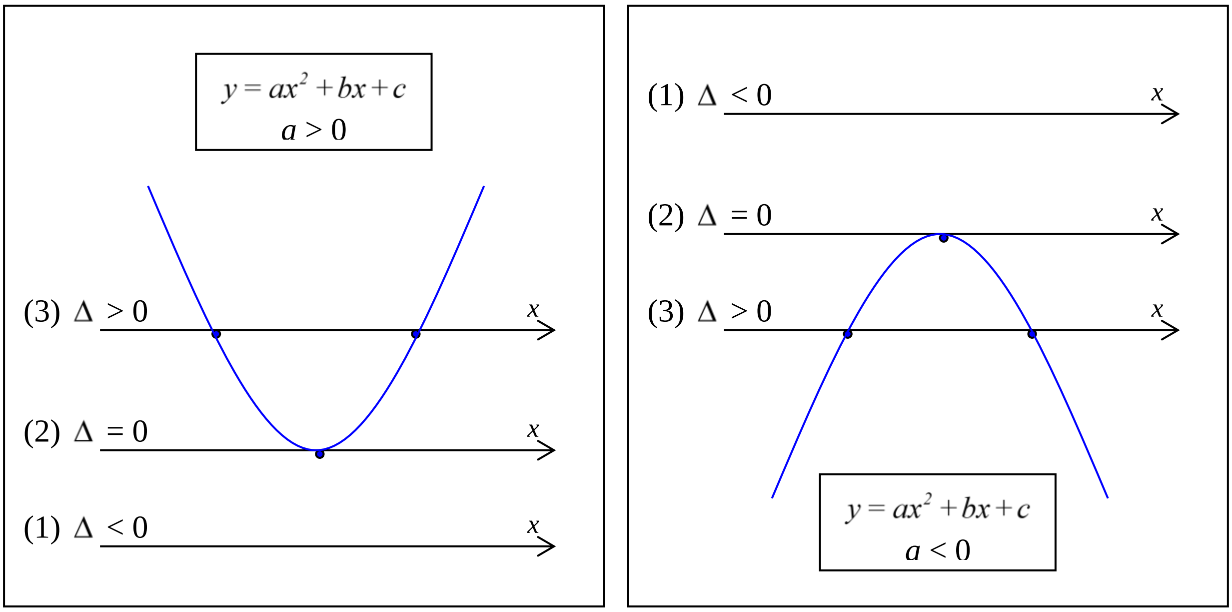
Frequentemente é necessário conhecer os pontos em que o gráfico da parábola intersecta os eixos coordenados. Para obtermos a intersecção com o eixo das ordenadas (Oy) basta substituir, na relação acima, x por zero. No entanto, para obtermos a intersecção com o eixo das abcissas (Ox), fazemos $y = 0$, isto é, teremos de resolver a equação quadrática: $ax^2 + bx + c = 0$.

Recorrendo, mais uma vez à informação que nos é transmitida pelo binómio discriminante, $b^2 - 4ac = \Delta$, podemos termos três casos seguintes:

- Se $\Delta < 0$ a equação é impossível em $\mathbb{R}$, isto é, a equação não tem solução, logo o gráfico desta parábola não intersecta o eixo das abcissas (Ox). (situações (1) nas figuras seguintes)

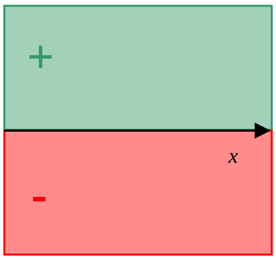
- Se $\Delta = 0$ a equação só tem uma solução, logo o gráfico desta parábola toca o eixo das abcissas (Ox) num só ponto, isto é, no vértice. (situações (2) nas figuras seguintes))

- Se $\Delta > 0$ a equação tem duas soluções em $\mathbb{R}$, logo o gráfico desta parábola intersecta o eixo das abcissas (Ox) em dois pontos. (situações (3) nas figuras seguintes)

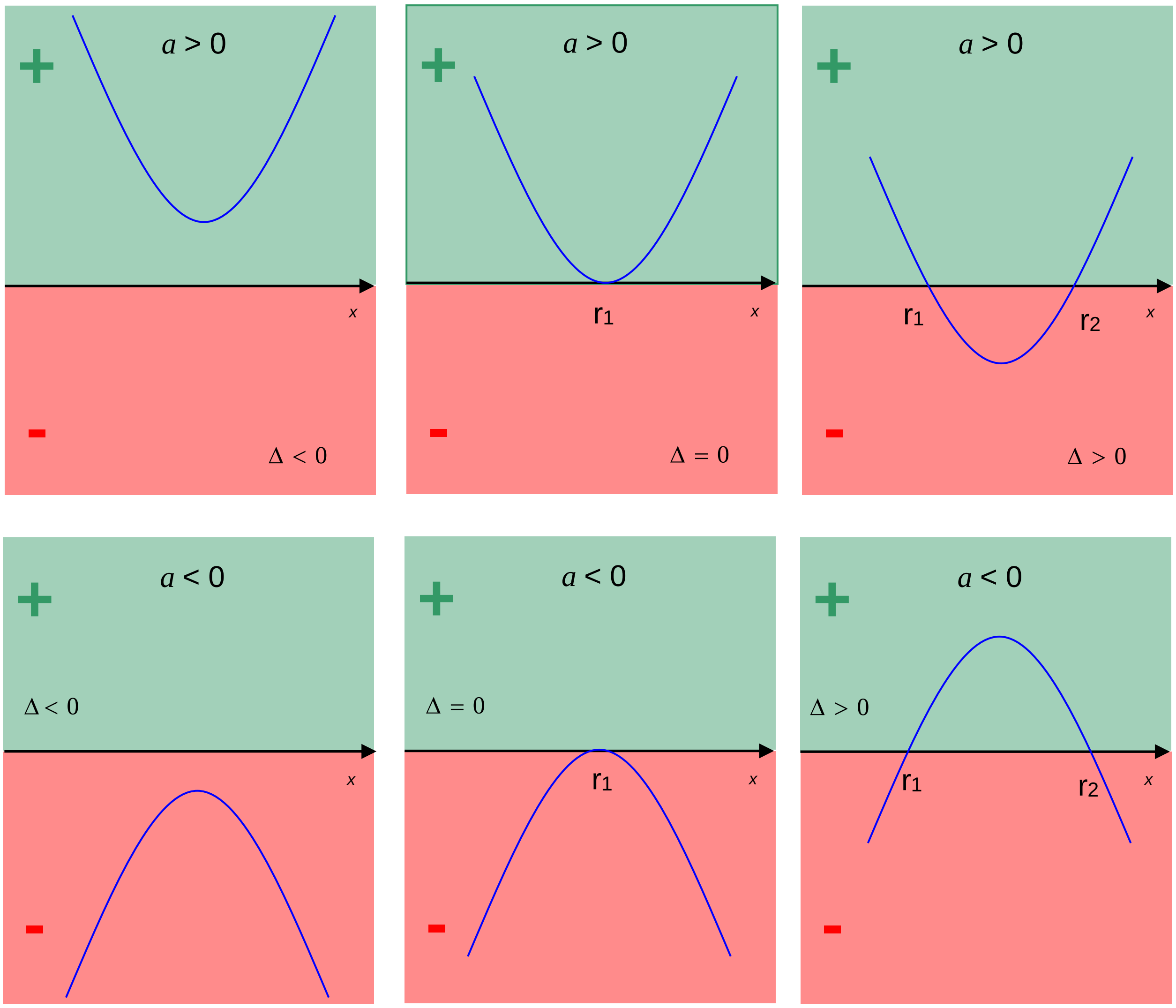


Inequações do segundo grau

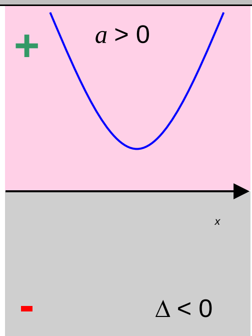
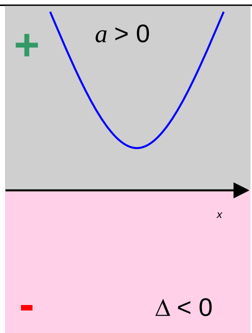
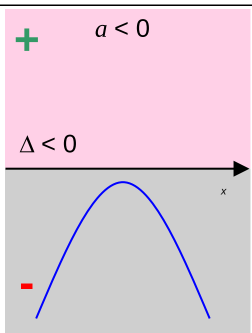
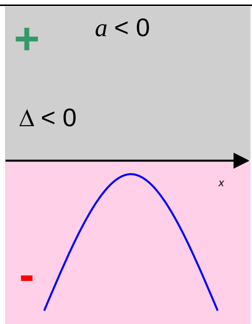
Com base no que referimos na anteriormente, podemos resolver inequações do segundo grau de um modo simples e intuitivo. O eixo das abcissas "divide" o plano em dois semiplanos – um positivo (superior) e um negativo (inferior - ver figura seguinte).

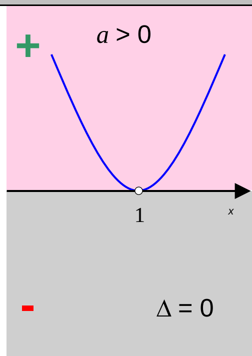
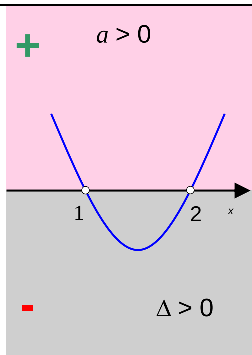
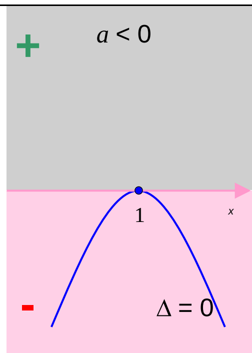
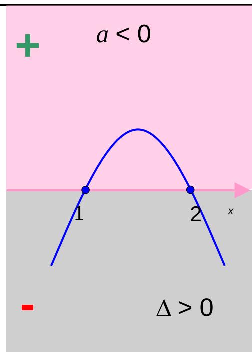


Se "conjugarmos" esta figura com as anteriores, conseguimos resolver (visualmente) qualquer inequação do segundo grau.



Nos quadros seguintes exemplificamos o que acabamos de referir genericamente, recorrendo a algumas inequações do segundo grau específicas:

Inequação	Solução da Equação	Representação	Conjunto Solução
$x^2 - 3x + 6 > 0$ (zona a rosa na figura)	$x^2 - 3x + 6 = 0$ $\Delta < 0$ Impossível Assim, a condição dada é **Universal**		$CS = \mathbb{R}$
$x^2 - 3x + 6 < 0$ (zona a rosa na figura)	$x^2 - 3x + 6 = 0$ $\Delta < 0$ Impossível Assim, a condição dada é **Impossível**		$CS = \varnothing$
$-x^2 + 3x - 6 > 0$ (zona a rosa na figura)	$-x^2 + 3x - 6 = 0$ $\Delta < 0$ Impossível Assim, a condição dada é **Impossível**		$CS = \varnothing$
$-x^2 + 3x - 6 < 0$ (zona a rosa na figura)	$-x^2 + 3x - 6 = 0$ $\Delta < 0$ Impossível Assim, a condição dada é **Universal**		$CS = \mathbb{R}$

Inequação	**Solução da Equação**	**Representação**	**Conjunto Solução**
$3x^2 - 6x + 3 > 0$ (zona a rosa na figura)	$3x^2 - 6x + 3 = 0$ $(\Delta = 0)$ $\Leftrightarrow x = 1$ Assim, a condição dada é válida para qualquer valor excepto o 1		$CS = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$x^2 - 3x + 2 > 0$ (zona a rosa na figura)	$x^2 - 3x + 2 = 0$ $(\Delta > 0)$ $x = 1 \vee x = 2$ Assim, a condição dada é válida excepto entre 1 e 2		$CS =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$
$-3x^2 + 6x - 3 \leq 0$ (zona a rosa na figura)	$-3x^2 + 6x - 3 = 0$ $(\Delta = 0)$ $\Leftrightarrow x = 1$ Assim, a condição dada é válida para qualquer valor		$CS = \mathbb{R}$
$-x^2 + 3x - 2 \geq 0$ (zona a rosa na figura)	$x^2 - 3x + 2 = 0$ $(\Delta > 0)$ $x = 1 \vee x = 2$ Assim, a condição dada é válida entre 1 e 2		$CS = [1, 2]$

Fonte: Filomena Soares e Cláudia Maia – 2007 - *Apontamentos de C.C.M. – Lic. em Educação Básica – ESE/IPP*