Funções do Primeiro Grau

Definição

Uma **função do primeiro grau** ou **função afim** pode ser representada por uma equação da forma $f(x) = m.x + b$, onde m e b são números reais.

Notações/Designações

- $\boldsymbol{m}$ é o **declive** ou **coeficiente angular** da reta
- $\boldsymbol{b}$ é a **ordenada na origem** a ordenada do ponto onde a reta interseta o eixo Oy, sendo sempre obtida como o valor de $f(0)$.
- O **zero da função** não é mais do que abcissa do ponto onde a reta interseta o eixo Ox, que se pode designar por **abcissa na origem.**
- Os pontos de reta não são mais do que pares ordenados da forma $(x, f(x))$.

Observações

- Se mantivermos <u>b fixo</u> e fizermos <u>variar o parâmetro m</u> na equação

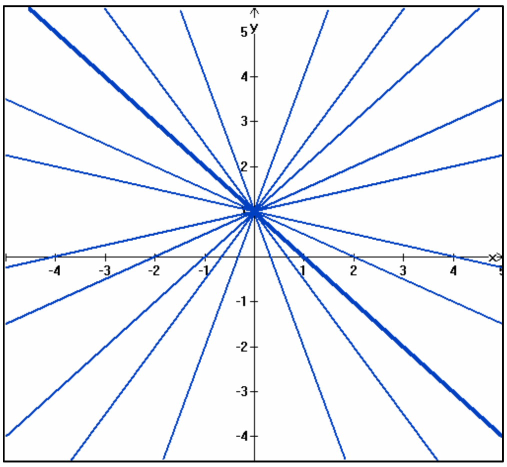
$$f(x) = mx + b$$

obtemos uma família de retas cuja ordenada na origem é a mesma (fig. (a)).

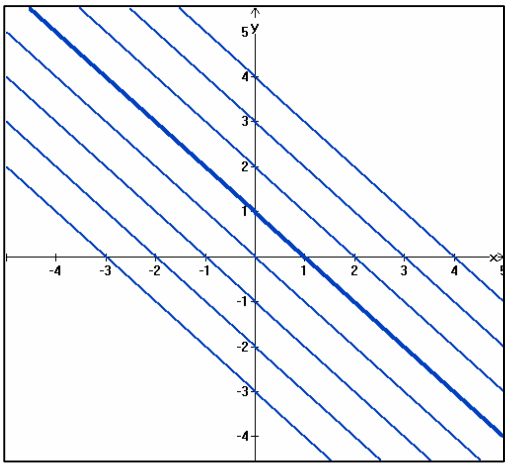
- Se mantivermos <u>m fixo</u> e fizermos <u>variar o parâmetro b</u> na equação

$$f(x) = mx + b$$

obtemos uma família de retas paralelas cujo declive é o mesmo (fig.(b)).



(a) $f(x) = mx + b$
(b fixo e m variando)



(b) $f(x) = mx + b$
(m fixo e b variando)

Exemplo

São exemplos de funções de primeiro grau:

$f(x) = 2x - 3$ onde se tem $m = \dots$ e $b = \dots$

$g(x) = -x + \dots$ onde se tem $m = \dots$ e $b = 3$

$y = \dots\dots\dots$ onde se tem $m = 4$ e $b = 0$

A construção do gráfico de uma função afim (reta) é importante para que, a partir dele, se possa analisar de um modo completo a função. Para o fazermos, basta conhecermos **dois dos seus pontos**. Esses pontos podem ser obtidos atribuindo apenas dois valores arbitrários para x e determinando suas imagens. Os dois pontos mais "simples" são aqueles em que a reta interseta (corta) os eixos:

- eixo Ox no zero da função $f(x)$, ou seja, onde $f(x)$ é igual a zero;
- eixo Oy em b, isto é, no valor de $f(0) = b$.

Genericamente temos, para uma função $f(x) = mx + b$:

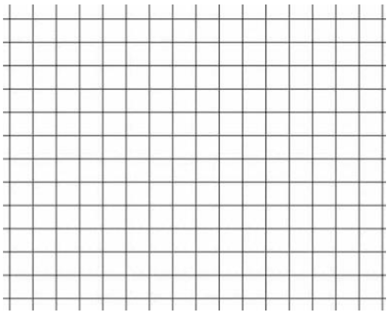
$$f(0) = b \quad \text{e} \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{m}$$

Exemplo

No caso da função $f(x) = 2x - 3$, podemos construir uma tabela de valores e, a através da sua marcação no plano cartesiano, unindo, obter a sua representação geométrica.

x	$f(x)$
0	
	0

Represente a reta em questão no quadriculado ao lado



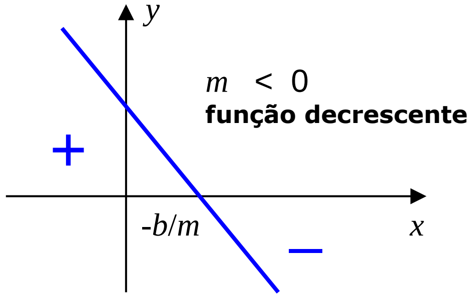
Sinal e monotonia de uma função do 1º grau

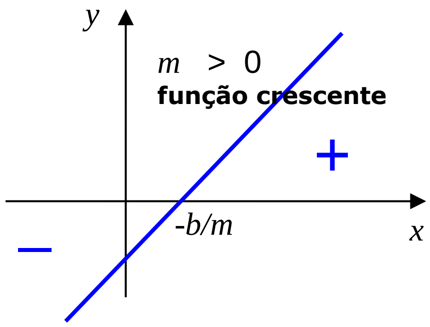
Uma função de primeiro grau $f(x) = mx + b$ é

CRESCENTE - se $m > 0$

DECRESCENTE - se $m < 0$

Considerando o zero da função acima referido ($f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{m}$), podemos esquematizar dois casos possíveis para a função de primeiro grau.





Caso Particular – Função Linear

Definição

Uma **função linear** é uma função do 1º grau onde $b = 0$, isto é, pode sempre ser representada por uma equação da forma $f(x) = mx$.

Observações

O gráfico de uma função linear é uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano, isto é: $f(x) = mx \Rightarrow f(0) = 0$. Assim para desenhar o gráfico de uma função linear basta determinar apenas mais um de seus pontos, pois um já é conhecido: a origem (0,0).

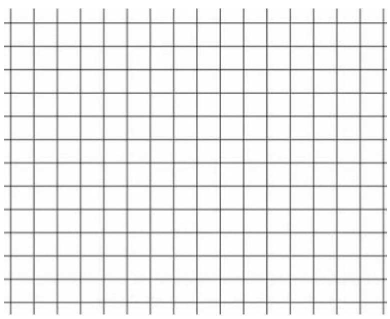
Exemplo

Consideremos a função $f(x) = \frac{2}{3}x$. Atribuindo-se, por exemplo, a x o valor 3 teremos: $f(3) = \dots\dots$

Assim a reta passa pelos pontos: (…,…) e (…,…).

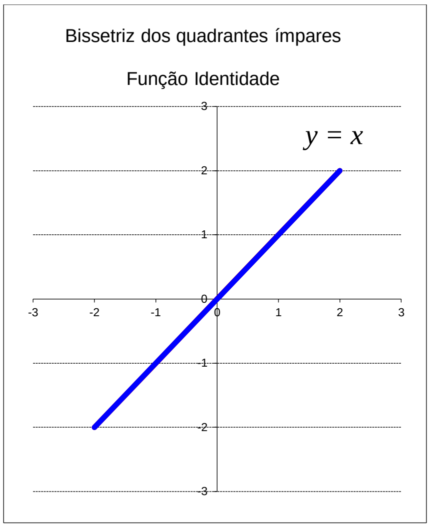
Se a função g for uma função linear cuja imagem de 2 é (- 4) então $g(x) = \dots$

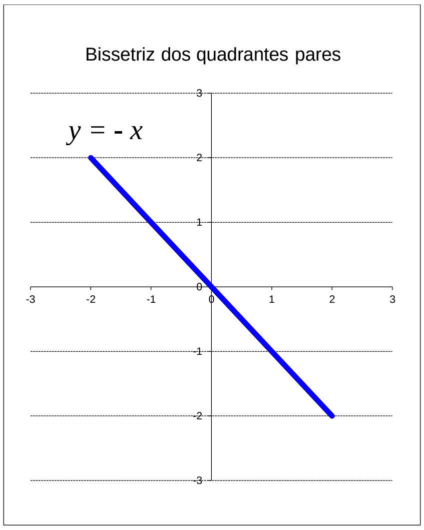
Represente, ao lado, os gráficos destas duas funções.



Existem duas funções lineares que merecem um destaque especial:

- a função $f(x) = x$ cujo gráfico é a bissetriz dos quadrantes ímpares, é também é denominada **função identidade**.
- A função $f(x) = -x$ cujo gráfico é a bissetriz dos quadrantes pares.





Complementos – Breve Revisão sobre Retas

Como vimos, representação geométrica de toda a equação do primeiro grau em x e y é uma reta, e vice versa, toda a reta pode ser representada por uma equação do primeiro grau em x e y. Por esta razão, a equação $\boxed{Ax + By + C = 0}$ designa-se usualmente por **equação geral da reta**, mas a **equação reduzida da reta** é a de utilização mais comum: $\boxed{y = mx + b}$ onde $\boldsymbol{m}$ é o **declive** $\boldsymbol{b}$ é a **ordenada na origem**.

O declive de uma reta não vertical tem duas interpretações importantes (embora relacionadas):

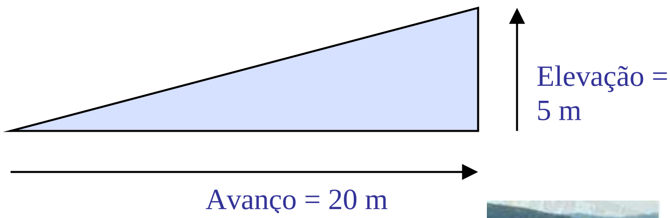
- $\boldsymbol{m}$ é a medida da inclinação da reta
- $\boldsymbol{m}$ é a taxa de variação de y relativamente a x.

Exemplo

Os topógrafos medem o nível ou inclinação de uma montanha como a razão entre o que se subiu e o que se avançou.

Esta ideia aplica-se às retas.

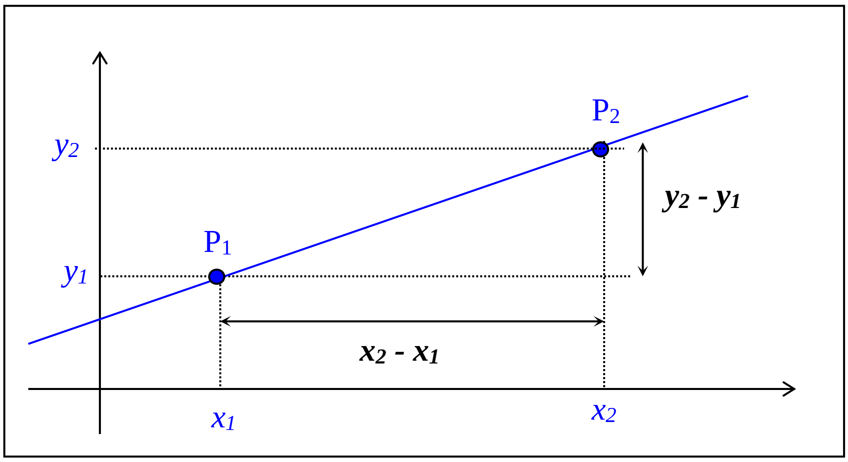
Assim, temos:



Inclinação = $\dfrac{\text{Elevação}}{\text{Avanço}} = \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{\quad}{\quad}$

Em percentagem, isto corresponde a uma inclinação de ……….%

De modo análogo, consideremos uma partícula que se move da esquerda para a direita sobre uma reta não vertical, partindo de um ponto $P_1 \rightarrow (x_1, y_1)$ até um ponto $P_2 \rightarrow (x_2, y_2)$, como se exemplifica na figura ao lado.

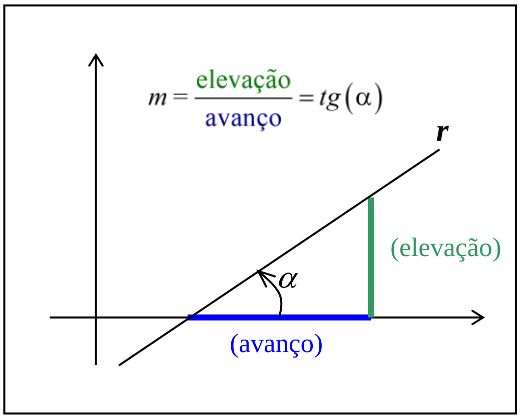


O ponto moveu-se $\boxed{y_2 - y_1}$ unidades verticalmente e $\boxed{x_2 - x_1}$ unidades horizontalmente.

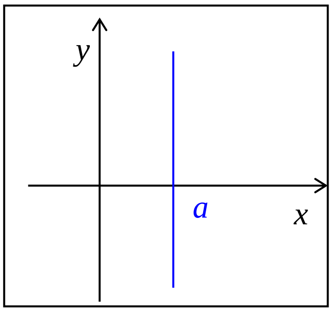
A variação vertical designa-se por **elevação** e a variação horizontal por **avanço**. A razão entre a elevação e o avanço é a inclinação, sendo indiferente a posição dos pontos sobre a reta, assim obtemos a expressão geral para o declive de uma reta, dados dois quaisquer dos seus pontos: $\boxed{m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

☞ Observações

Como se pode visualizar na imagem ao lado:



- o **ângulo de inclinação de uma reta** (α) é menor ângulo positivo medido no sentido anti-horário do eixo das abcissas (Ox) até à reta.
- O declive de uma reta pode ser expresso à custa desse ângulo: $\boxed{m = tg(\alpha)}$
- $0 \le \alpha < 180^\circ$ (ou, em radianos, $0 \le \alpha < \pi$)
- Se α for um ângulo agudo ($0 < \alpha < 90^\circ$) a reta tem declive positivo, se α for obtuso ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$) tem declive negativo.
- Se α for um ângulo reto ($\alpha = 90^\circ$) estamos perante uma reta vertical cujo declive não é definido ou "infinito" (avanço nulo), cuja equação é da forma $x = a$ (contante).
  Retas verticais não representam qualquer função!



Exemplo

Consideremos o ponto A de coordenadas $(-1,4)$.

- Se o gráfico de f é uma reta de declive $m=2$, então $f(x)=.........$
- O declive da reta que passa por A e pelo ponto $(1,-2)$ é $m=............$. Esta reta é a representação gráfica da função $h(x)=.........$.
- Se A pertence ao gráfico da função linear g, então $g(x)=.........$
- A é o ponto de interseção de uma reta vertical de equação .... e da reta horizontal de equação ....

Para terminar esta pequena revisão não devemos deixar de referir as relações existentes entre os declives de **retas paralelas** e **retas perpendiculares**:

- Duas retas distintas ***r*** e ***s***, não verticais, são **paralelas** se e só se os seus declives forem iguais: $m_r = m_s$
- Duas retas distintas ***r*** e ***s***, não verticais, são **perpendiculares** se e só se o declive de uma for o simétrico do inverso do declive da outra: $m_r = -\frac{1}{m_s}$.

Exemplo

- $-4x-2y+3=0$ é a equação geral de uma reta. Então, a equação reduzida de uma reta que lhe é paralela e que passa no ponto $(5,0)$ é ....
- $h(x)=.........$ é uma função linear cujo gráfico é uma da reta perpendicular à reta de equação $-2x-3y+1=0$
- A equação da reta perpendicular ao gráfico da função real (constante) $g(x)=5$ que passa no ponto $(-2,7)$ é ....

Extra - Proporcionalidade Direta e a Função Afim / Proporcionalidade Inversa

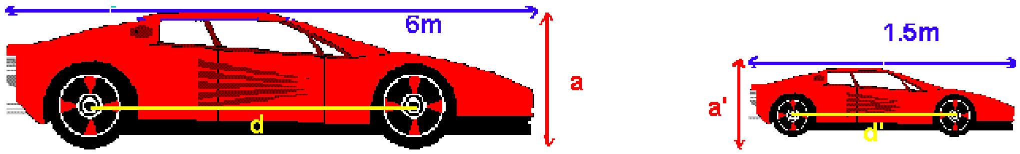
🕮 Definição

Duas grandezas x e y dizem-se **diretamente proporcionais** se a razão entre elas é constante, isto é, se o quociente entre cada valor de y e o respetivo valor de x for sempre igual. Esta razão escreve-se $\frac{y}{x}=k$ ou $y=k.x$, onde k é a **constante de proporcionalidade**.

A relação $x \to k.x$ representa uma função de proporcionalidade direta, sendo k a constante de proporcionalidade. Esta é uma **função linear**, representada geometricamente por uma reta que passa na origem. Note-se que, toda a função cujo gráfico é uma reta que passa pela origem do referencial é de proporcionalidade direta.

Exemplo

Na figura abaixo estão dois desenhos cujas grandezas são proporcionais.



- Qual a razão entre as dimensões dos seus comprimentos? $k = ...$
- Se o carro grande tiver altura $a = 1,6m$ então a altura do pequeno é $a' = ...$
- Se a distância entre os eixos do carro pequeno é d'= 0.5m qual será essa distância (d) no carro grande? $d = ...$

Para responder às duas últimas questões podemos utilizar uma regra de "três" simples, versão "corrente" da relação (igualdade de frações): $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$

Proporcionalidade Inversa

Para dizermos, que duas variáveis são inversamente proporcionais, não é suficiente que uma aumente enquanto a outra diminui, é também necessário que esta relação se verifique na mesma proporção.

🕮 Definição

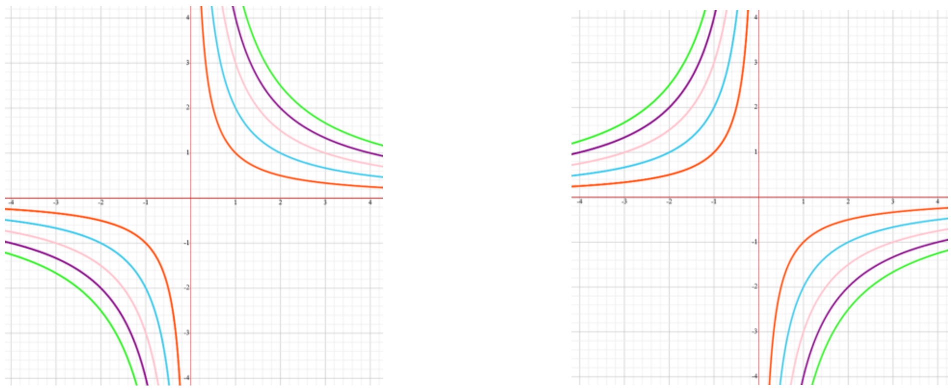
Duas grandezas x e y dizem-se **inversamente proporcionais** se o produto delas elas é constante, isto é, se o produto de cada valor de y pelo correspondente valor de x for sempre igual. Este produto escreve-se $x.y = k$ ou $y = \frac{k}{x}$, onde k é a **constante de proporcionalidade**.

A correspondência $x \to \frac{k}{x}$ representa uma função de proporcionalidade inversa, sendo k a constante de proporcionalidade.

☞ Observações

Relativamente a estas funções observe que:

- Nas tabelas o produto de dois valores correspondentes é constante.
- Nos gráficos os pontos não são colineares; o produto das coordenadas de cada ponto do gráfico é sempre o mesmo.
- Sempre que o valor de uma das variáveis vem multiplicado por um número, o valor correspondente de outra vem dividido pelo mesmo número.
- Sendo o **domínio** de uma função de proporcionalidade inversa o conjunto de todos os números **diferentes de zero**, o seu gráfico é uma curva designada por **hipérbole**.



(a) $k > 0$ (b) $k < 0$

Exemplo

A tabela junta apresenta alguns valores de pressões (em atmosferas) a que está sujeita uma massa de hidrogénio, e os correspondentes volumes (em cm^3) que ocupa.

P	12	6	4	2	...
V	5	10	15	30	...

- P e V variaram no mesmo sentido ou em sentido contrário? ....
- Verifique que V é inversamente proporcional a P e indique a constante de proporcionalidade. $k = ...$
- Escreva uma expressão analítica dessa função de proporcionalidade. $V = \frac{....}{P}$
- Calcule o valor de V correspondente a P = 3 atmosferas. $V = ...$
- Que acontece a V quando P duplica? E quando P triplica?

....

Fontes: Filomena Soares e Paula Nunes – 2000 - 2016 Textos de Apoio de várias UCs de Matemática – ESEIG/IPP / Filomena Soares e Cláudia Maia – 2007 - *Apontamentos de C.C.M. – Lic. em Educação Básica – ESE/IPP.*