Conceitos Gerais sobre Funções

Correndo o risco de repetição (relativamente ao já abordado em Fichas anteriores) seguem-se alguns conceitos e designações, talvez com uma "roupagem" diferente:

- **Função real de variável real** (f.r.v.r.) - é qualquer função cujo domínio e contradomínio sejam subconjuntos de $\mathbb{R}$.

- **Domínio de uma f.r.v.r. f** $\left(D_f\right)$ - é o conjunto dos valores da variável independente, x, para os quais a função está definida, isto é, para os quais $f(x)$ tem significado. Assim temos: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$

Observações

Desta definição, sendo o domínio um subconjunto de $\mathbb{R}$, e pelo que vimos até ao momento em termos de regras operatórias neste conjunto, apenas não é possível calcular o valor de uma:

- **divisão por 0** (zero)
- **raiz de índice par de um número negativo**

Neste sentido, e em termos práticos, podemos afirmar que, até aqui, teremos apenas as seguintes restrições, em domínios de f.r.v.r da forma:

- Restrição 1 – $f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)} \Rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} : B(x) \neq 0\}$
- Restrição 2 – $f(x) = \sqrt[p]{A(x)} \Rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} : A(x) \geq 0\}$, quando ***p* é par**.

sendo $A(x)$ e $B(x)$ polinómios em x de coeficientes reais.

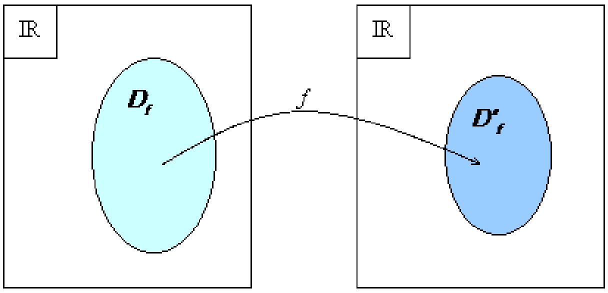
Exemplo

A função $f(x) = 2x^2 - 3$ tem domínio ………… uma vez que não há restrições no cálculo da imagem de qualquer número real.

O domínio da função $g(x) = \dfrac{2x-3}{x-3}$ será ………… uma vez que teremos de impor a condição ……………… por não estar definida a divisão por zero, não podendo x ser substituído por …….

O domínio da função $h(x) = \sqrt[4]{x-2}$ será ………… pois teremos de impor a condição ……………… por não existirem, em $\mathbb{R}$, raízes de índice par de números negativos.

- **<u>Contradomínio de uma f.r.v.r. f</u>** $\left(D'_f\right)$ - é o conjunto de todas as imagens, isto é, dos valores da variável dependente, y: $D'_f = \left\{ y \in \mathbb{R} : y = f(x) \wedge x \in D_f \right\}$

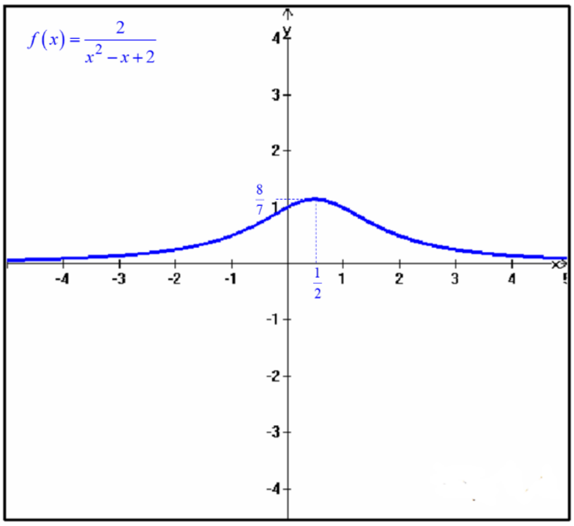


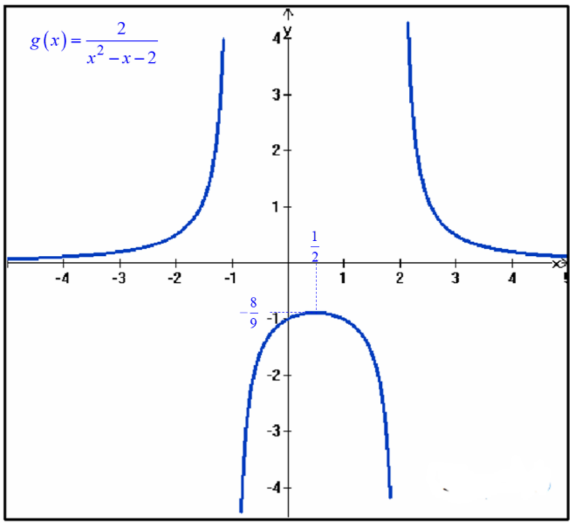
- **<u>Gráfico de uma f.r.v.r f</u>** $\left(Gr(f)\right)$ - é o conjunto de todos os pontos do plano correspondentes aos pares ordenados $\left(x, f(x)\right)$ com $x \in D_f$, isto é: $Gr(f) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) \wedge x \in D_f \right\}$

Ter acesso ao gráfico representativo de uma função ajuda a compreender o seu comportamento e características permitindo, muitas vezes, obter informações importantes através de uma análise cuidadosa suportada por uma verificação analítica.

Exemplo

Consideremos as seguintes funções e as representações geométricas correspondentes: $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - x + 2}$ e $g(x) = \dfrac{2}{x^2 - x - 2}$





$D_f =$ .... uma vez que a equação $x^2 - x + 2 = 0$ tem a seguinte solução: ....

Exemplo

$D_g =$.......................... uma vez que a equação $x^2 - x - 2 = 0$ tem a seguinte solução: ....

Este resultado pode ser constatado por observação dos gráficos apresentados (eixo das abcissas).

Relativamente ao contradomínio (conjunto das imagens), apenas por observação dos gráficos das duas funções (eixo das ordenadas) e com base nos valores aí apresentados, podemos concluir que:

$D'_f =$ .... e $D'_g =$..........................

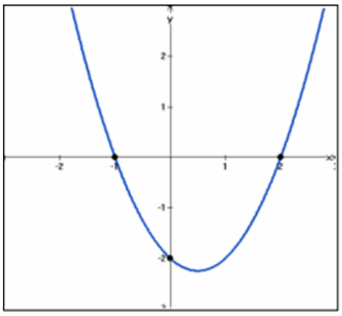
Zeros de uma f.r.v.r f

são os valores da variável independente, x, para os quais a função é nula, isto é, as soluções da equação $f(x) = 0$: $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$. São importantes na representação gráfica de uma função uma vez que nos fornecem os pontos de intersecção com o eixo das abcissas (*Ox*).

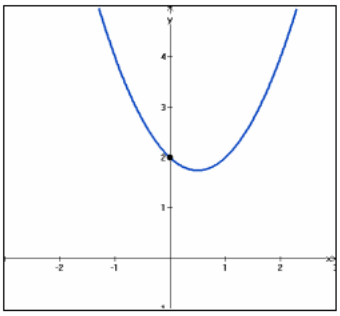
A intersecção com o eixo das ordenadas (*Oy*) é a imagem de "0", isto é, obtém-se calculando $f(0)$ (não confundir com os zeros da função) e designa-se por **ordenada na origem do gráfico da função**.

Exemplo

- Na figura ao lado podemos ver o gráfico representativo da função $h(x) = x^2 - x - 2$. Se o analisarmos vemos que a função apresenta dois zeros em $x =$....... e $x =$....... ($x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = ... \vee x = ...$). Notemos, também, que o gráfico intersecta o eixo das ordenadas em $y =$...... (ordenada na origem: $h(....) =$.......)



- Se analisarmos o gráfico representativo da função $i(x) = x^2 - x + 2$ podemos facilmente constatar que esta função não tem zeros reais ($x^2 - x + 2 = 0$ é impossível) e que o seu gráfico intersecta o eixo das ordenadas em $y =$...... (ordenada na origem: $i(......) =$......).



- Observando as funções f e g do exemplo anterior, podemos afirmar que nenhuma delas tem zeros e as respetivas ordenadas na origem são ...... e ....

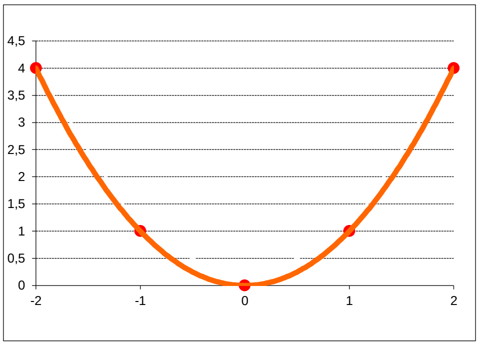
Paridade de uma função *f*

- Uma função real f é uma função **par** se $\forall x \in D_f$ se tem $-x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$

  Em termos geométricos, uma função é par se a sua representação geométrica for simétrica relativamente ao eixo das ordenadas.

Exemplo

Consideremos, por exemplo a função $f(x) = x^2$. Atribuindo valores a x podemos construir uma tabela de imagens, o que nos permite esboçar o seu gráfico:



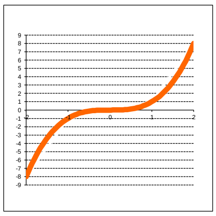
x	$f(x) = x^2$
-2	……
-1	…..
0	……
1	……
2	……

Observe que a curva é simétrica em relação ao eixo 0Y. Esta característica das funções pares resulta do facto de, para dois valores simétricos $x = a$ e $x = -a$, teremos sempre $f(a) = f(-a)$.

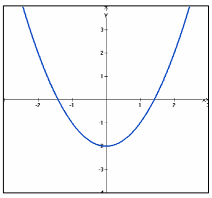
- Uma função real f é uma função **ímpar** se $\forall x \in D_f$ se tem $-x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$. Em termos geométricos, uma função é ímpar se a sua representação geométrica for simétrica relativamente à origem.

Exemplo

- Considerando, por exemplo, a representação geométrica do gráfico da função $f(x) = x^3$, verificamos facilmente para dois valores simétricos do domínio $x = a$ e $x = -a$, teremos sempre imagens simétricas: $f(-a) = -f(a)$.

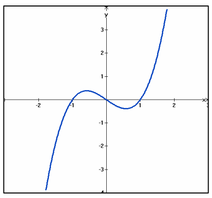


- Considere as funções f e g representadas nas imagens ao lado. Sendo as respetivas expressões analíticas $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = x^3 - x$ não será difícil mostrar que f é uma função par:



$$f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = f(x)$$

e g é uma função ímpar:



$$g(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -g(x)$$

Monotonia de uma função *f* (conceito introduzido na FT 6)

Consideremos a função real f e um conjunto $A \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}$.

Diz-se que f é **monótona**:

- **crescente** em A se e só se $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \forall x_1, x_2 \in A$
- **decrescente** em A se e só se $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \forall x_1, x_2 \in A$

ou ainda [1]

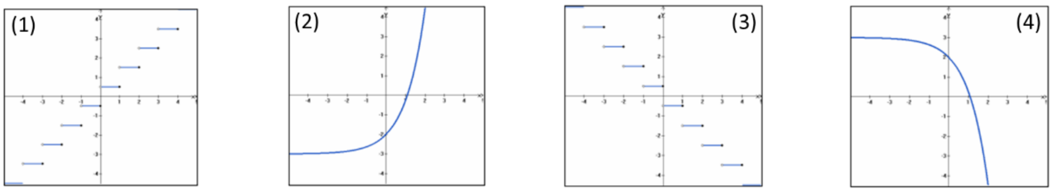
- **não decrescente** em A se e só se $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in A$
- **não crescente** em A se e só se $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in A$

☞ Observações

- Quando se diz que uma função é monótona sem se mencionar qualquer conjunto, pretende-se dizer que é monótona em todo o seu domínio.
- A designação de apenas crescente ou decrescente refere-se ao sentido estrito.

Exemplo

Nas figuras (1) e (2) podemos ver, respectivamente, o gráfico representativo de uma função monótona não decrescente e de uma função (estritamente) crescente, enquanto que nas figuras (3) e (4) estão exemplos de, respectivamente, uma função monótona não crescente e de uma função (estritamente) decrescente.



Extremos de uma função *f*

Seja f uma função real e consideremos um ponto $x_0 \in D_f$. Diz-se que f atinge:

- um **mínimo**, $f(x_0)$, em x_0 sse $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in D_f$;
- um **máximo**, $f(x_0)$, em x_0 sse $f(x_0) \geq f(x), \forall x \in D_f$;

☞ Observações

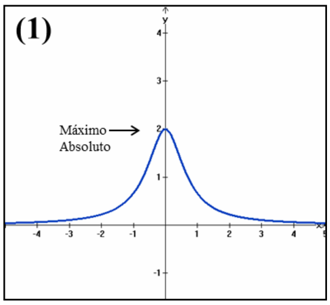
Definimos extremos **absolutos** de uma função f, a definição de extremo **relativo** ou **local** é idêntica bastando substituir, nas definições anteriores, D_f por $]a,b[\subseteq D_f$.

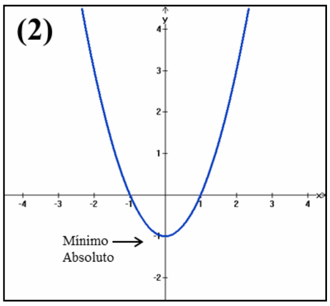
---

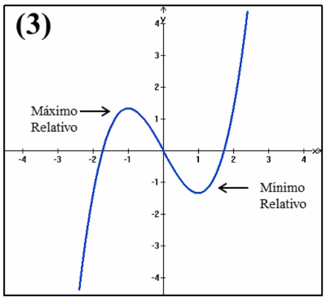
[1] Usualmente designadas por crescente ou decrescente em sentido lato, respetivamente, aqui designadas pela "negativa".

Exemplo

Nos exemplos ilustrados nas figuras (1) e (2) podemos ver duas funções com extremos absolutos e uma com dois extremos locais cujo gráfico representativo está na figura (3).







Com base na informação transmitida pelas imagens, indique os respetivos Domínios e contradomínios: ....

A título de curiosidade, as expressões analíticas destas funções são, respetivamente: $f_1(x)=\dfrac{2}{2x^2+1}$, $f_2(x)=x^2-1$ e $f_3(x)=2\left(\dfrac{x^3}{3}-x\right)$

Função Limitada

- Uma função f diz-se **majorada** se o seu contradomínio for um conjunto majorado, isto é: $\exists_{M\in\mathbb{R}} : f(x)\leq M, \forall x\in D_f$
- Uma função f diz-se **minorada** se o seu contradomínio for um conjunto minorado, isto é: $\exists_{m\in\mathbb{R}} : f(x)\geq m, \forall x\in D_f$
- Uma função f diz-se **limitada** se for, simultaneamente, majorada e minorada, isto é, se o seu contradomínio for um conjunto limitado, ou seja:

$$\exists_{m,M\in\mathbb{R}} : m\leq f(x)\leq M, \forall x\in D_f \quad \text{ou} \quad \exists_{L\in\mathbb{R}^+} : |f(x)|\leq L, \forall x\in D_f$$

Exemplo

- No exemplo anterior a função representada na figura (1) é limitada uma vez que apenas toma valores não negativos e todas as imagens são menores, ou iguais, a 2. Assim, podemos escrever neste caso: $\ldots\ldots \leq f(x) \leq \ldots\ldots, \forall x\in D_f$
- No caso da função representada em (2) podemos afirmar que a função é …………………….. mas não é ……………………. Logo a função ………. limitada.
- Relativamente à função representada na figura (3), a função ………….. limitada (bastará verificar qual o seu contradomínio).

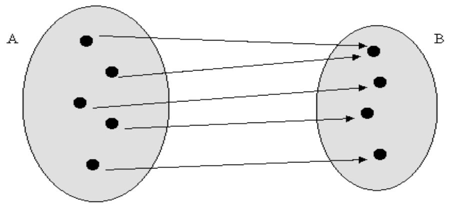
FUNÇÕES INJECTIVAS, SOBREJECTIVAS E BIJECTIVAS

Sobrejetividade

Dada uma função $f : A \to B$ dizemos que ela é função **sobrejectiva** quando todo elemento de B for imagem de pelo menos um elemento do domínio A da função, isto é, quando o contradomínio ou conjunto-imagem de f é igual ao seu conjunto de chegada.

Exemplo

Não há qualquer elemento em B que não seja imagem de algum elemento de A.



Sendo f uma f.r.v.r., de um modo mais formal podemos dizer que:

Definição

f é **sobrejectiva** sse todos os elementos do conjunto de chegada, neste caso IR, são imagem de algum ponto do domínio, isto é: $D'_f = \mathbb{R}$

Graficamente a sobrejetividade pode verificar-se através do "***teste da reta horizontal***" – *Qualquer reta horizontal intersecta o gráfico da função*.

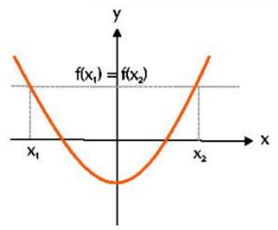
Injectividade

Definição

f é **injectiva** sse a objectos diferentes correspondem imagens diferentes, isto é: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in D_f$.

Graficamente a injetividade pode verificar-se através de outro "teste da reta horizontal" – Qualquer reta horizontal **que intersecte** o gráfico da função fá-lo **unicamente num ponto**.

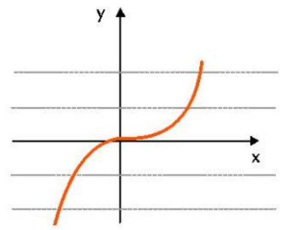
Exemplo



Função INJETIVA

Coloque uma seta da "designação" para o gráfico correspondente.

Função NÃO INJETIVA



Bijectividade

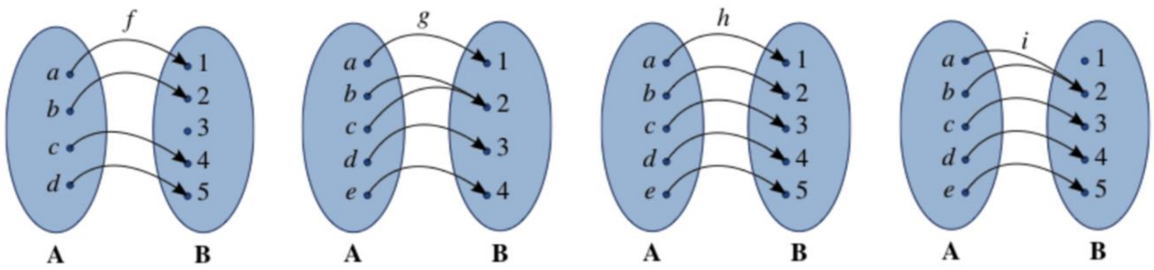
🕮 Definição

> f é **bijectiva** se é, simultaneamente, injectiva e sobrejectiva.

Analogamente, a bijetividade pode ser verificada graficamente através do "teste da reta horizontal" mais completo – *Qualquer reta horizontal intersecta sempre o gráfico da função em apenas um ponto*.

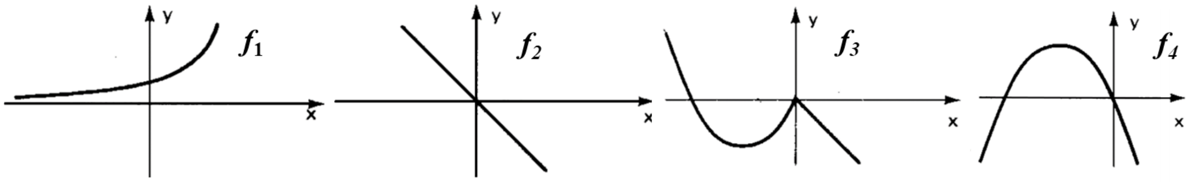
Exemplo

- Indique quais as funções de A em B seguintes que são injetivas, sobrejetivas ou bijetivas:



Injetivas: .... Sobrejetivas: .... Bijetivas: ....

- Indique, entre as f.r.v.r cujos gráficos estão representados abaixo são injetivas, sobrejetivas ou bijetivas:



Injetivas: .... Sobrejetivas: .... Bijetivas: ....

- Considere as f.r.v.r. $f_1(x)=5$, $f_2(x)=5-3x$, $f_3(x)=75-3x^2$ e $f_4(x)=x-x^3$ e classifique-as em função da injetividade, sobrejetividade e bijetividade.

Injetivas: .... Sobrejetivas: .... Bijetivas: ....

Fontes: Filomena Soares e Paula Nunes – 2000 - 2016 Textos de Apoio de várias UCs de Matemática – ESEIG/IPP