OPERAÇÕES COM FUNÇÕES

OPERAÇÕES ALGÉBRICAS

Consideremos as funções f e g, com domínios, respetivamente, D_f e D_g.

Definem-se, então, as funções:

- **Soma** de f e g, que se representa por $f+g$, como: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- **Diferença** entre f e g, que se representa por $f-g$, como: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
- **Produto** de *f* por *g*, que se representa por *f.g*, como: $(f.g)(x)=f(x).g(x)$

cujo domínio é, nos três casos, $D=D_f \cap D_g$

- **Quociente** entre f e g, que se representa por *f/g*, como: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

  cujo domínio é $D=D_f \cap D_g \setminus \{x \in D_g : g(x)=0\}$

Exemplo

Sendo $f(x)=x^2-x$ e $g(x)=x+2$ calcule

- $(f+g)(2)=$............ $(f+g)(x)=$............... Indique o dominio: $D_{f+g}=$ ....
- $(g-f)(5)=$............ $(f\times g)(3)=$............
- $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)=$............... $\left(\frac{g}{f}\right)(x)=$............... Indique o dominio: $D_{\frac{g}{f}}=$ ....

COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Definição

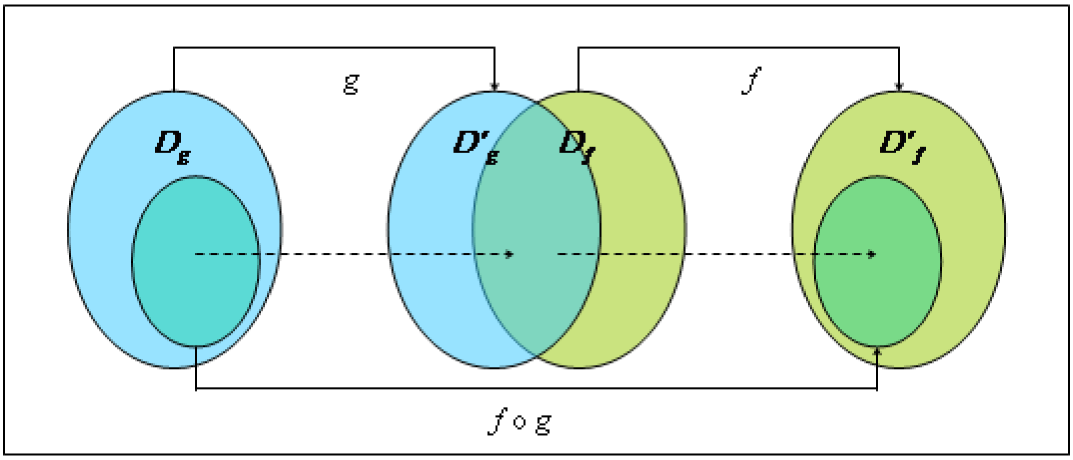
Consideremos as funções f e g, com domínios, respetivamente, D_f e D_g. A **função composta** de f com g, que se representa por $f \circ g$, é dada por:

$$(f \circ g)(x)=f[g(x)]$$

e o seu domínio é $D_{f o g}=\{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$

Observações

A notação $f \circ g$ é lida como "f após g" (f depois de g) e, em geral, é diferente de $g \circ f$ uma vez que $(f \circ g)(x)=f[g(x)]$ enquanto que $(g \circ f)(x)=g[f(x)]$



Exemplo

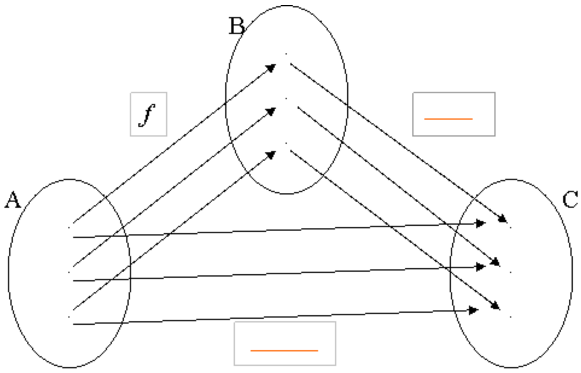
- Considerando f: A→ B e g: B → C, complete o esquema ao lado.
- Sendo $f(x) = x^2 - 5$ e $g(x) = 2x + 3$ determine o valor de:

  $(g \circ f)(2) =$ ________________

  $(f \circ g)(2) =$ ________________

  $(g \circ f)(0) =$ ________________

  $(f \circ g)(5) =$ ________________



Como determinar a Expressão analítica de uma Função Composta

Até agora, e quando apenas necessitamos de uma imagem pontual, calculamos o valor de expressões como $(f \circ g)(a)$ em duas etapas consecutivas:

(1) determinamos o valor de $g(a)$

(2) determinamos o valor de $f\left[g(a)\right]$

No entanto podemos calcular diretamente a imagem, de um qualquer objeto, numa função composta se conseguirmos determinar a expressão analítica que a define. Para isso bastará, para $g \circ f$, que se substituía a variável x, na expressão de g, pela expressão analítica de f e, para $f \circ g$, basta substituir a variável x, na expressão de f, pela expressão analítica de g. A partir daqui é manipulação algébrica ("contas") para se obter uma expressão "mais simplificada".

Exemplo

Sendo $f(x) = x^2 - 5$ e $g(x) = 2x + 3$ determine as expressões analíticas das seguintes funções compostas:

- $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(2x+3) = (2x+3)^2 - 5 = 4x^2 + 12x + 4$
- $(g \circ f)(x) =$ ______________________________
- $(f \circ f)(x) =$ ______________________________
- $(g \circ g)(x) =$ ______________________________

☞ Observações

Sempre que é efetuada a composição de funções, deverá ser dada especial atenção ao **domínio da função composta** pois, o domínio da expressão "final" poderá não ser o correto.

Exemplo

Considere a função $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$. O Domínio desta função é $D_f = ...$.

No entanto se a expressão de f tiver resultado da composição das funções $g \circ h$ onde $g(x) = \frac{1}{x}$ e $h(x) = \frac{x-3}{x-2}$, isto é, $f(x) = (g \circ h)(x)$, o seu domínio será $D_f = D_{g \circ h} = ...$, que resulta da aplicação da definição: $D_{g o h} = \{x \in D_h : h(x) \in D_g\}$ onde é importante reconhecer as condições que definem os domínios.

- No caso da função h, não podemos dividir por zero, logo não podemos calcular a imagem de "2": $x \in D_h \Rightarrow x - 2 \neq 0$
- No caso da função g só podemos calcular imagens de objetos não nulos (mais uma vez por não estar definida a divisão por zero) então, sendo neste caso o objeto em causa "$h(x)$" temos: $h(x) \in D_g \Rightarrow h(x) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-2} \neq 0 \Leftrightarrow x - 3 \neq 0$.

Assim se conclui que $x \neq 2 \wedge x \neq 3$!

☞ Observações

De uma forma geral, as funções com que trabalhamos resultam de operações e composição de funções elementares.

Note que o exemplo seguinte é apenas um exemplo de "decomposição", cujo objetivo é mostrar que trabalhamos sempre com operações sobre funções sem que nos apercebamos, ou pensemos sequer, que o estamos a fazer.

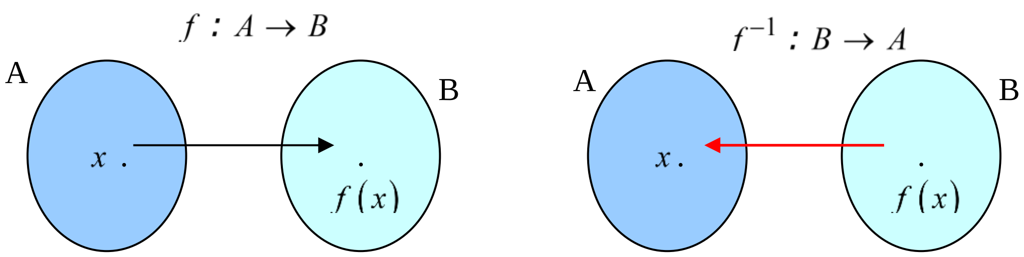
Exemplo

- Consideremos a função: $p(x) = 2x.\sqrt{\dfrac{x^3}{3} - x}$. Podemos pensar em decompô-la no produto de $s(x) = ...$ e $t(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{3} - x}$. Logo: $p(x) = (s.t)(x)$. No entanto, podemos ainda interpretar a função t como a composição de duas, $r \circ q$ onde: $r(x) = ...$ e $q(x) = \dfrac{x^3}{3} - x$. Podemos pensar em "decompor" esta função q na diferença de outras duas funções g e h, sendo $g(x) = ...$ e $h(x) = ...$. Neste caso, poderíamos escrever: $p(x) = \left[s.\left[r \circ (g - h)\right]\right](x)$.

- Identifique as expressões analíticas das funções f_1, f_2, f_3 e f_4 sabendo que: $u(x) = \dfrac{(2x-1)^3}{5(x-3)} = \left(\dfrac{f_1 \circ f_2}{f_3 . f_4}\right)(x)$: $f_1(x) = ...$ $f_2(x) = ...$ $f_3(x) = ...$ $f_4(x) = ...$

INVERSÃO DE FUNÇÕES – FUNÇÃO INVERSA

Se f é uma função **bijetiva** de A em B então sabemos que f associa a cada elemento de A um único elemento de B, o que nos permite definir uma nova função de domínio B e contradomínio A, que associa a cada elemento de B um único elemento de A. Esta função designa-se por **função inversa** de f e representa-se por f^{-1}. Simbolicamente podemos escrever: $f : x \to y = f(x)$ onde $x \in A \wedge y \in B$ e $f^{-1} : y \to x$ onde $y \in B \wedge x \in A$



Exemplo

Se A={1,2,3,4}, B={3,6,9,12} e $f : A \to B$ é definida por $f(x) = 3x$, então teremos as tabelas ao lado que definem as funções f e f^{-1}. Complete-as.

x	y
1	3
2	...
3	...
4	...

y	x
3	1
...	2
...	3
...	4

Será difícil indicar uma expressão para a função f^{-1}?..............................

Podemos formalizar a definição de função inversa, recorrendo à composição de funções:

Definição

Consideremos as funções f e g, com domínios, respetivamente, D_f e D_g.

As funções f e g são inversas uma da outra se e só se:

$$f\left[g(x)\right]=x,\ \forall x\in D_g \quad \text{e} \quad g\left[f(x)\right]=x,\ \forall x\in D_f$$

A função g representa-se por f^{-1}, que se lê "inversa de f " e tem-se $D_f=D'_{f^{-1}}\wedge D'_f=D_{f^{-1}}$

Observações

- É importante reforçar a relação direta entre os domínios e contradomínios destas funções: $D_f = D'_{f^{-1}}$ e $D'_f = D_{f^{-1}}$. Esta relação é utilizada em algumas situações para analiticamente obter o contradomínio de uma função através da determinação do domínio da sua inversa (quando exista).
- Não confundir função inversa de f : $y = f^{-1}(x)$ com inverso numérico do valor da função $y=\left[f(x)\right]^{-1}=\dfrac{1}{f(x)}$. Não esquecer que: $f^{-1}(x)\neq\dfrac{1}{f(x)}$!

Como determinar a Expressão analítica de uma Função Inversa

Dada a função $f : A\rightarrow B$ bijetiva, definida pela expressão analítica $y = f(x)$, podemos obter a expressão analítica da sua função inversa do seguinte modo:

- ✓ resolvemos essa relação em ordem a x a equação $y = f(x)$;
- ✓ na expressão $x = f^{-1}(y)$ trocamos a variável x por y e y por x, obtendo a expressão analítica da função inversa de f : $y = f^{-1}(x)$.

Observações

Devemos lembrar que a "inversa" pretende encontrar o objeto correspondente a uma imagem dada pelo que inverte as operações realizadas pela função ao objeto!

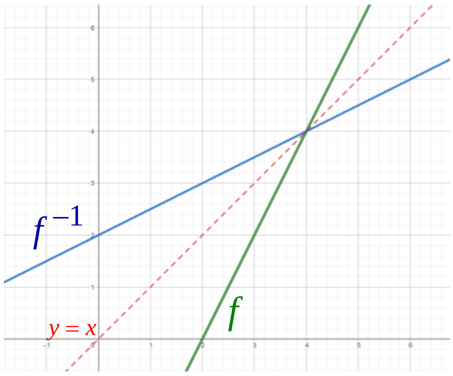
Exemplo

Considerando a função definida por $f(x) = 2x - 4$ verificamos que a função f: Multiplica cada objeto por 2 e, depois, subtrai 4 a esse resultado. Para inverter estas operações (processo) deveremos adicionar 4: $x + 4$ e, seguidamente, dividir o resultado obtido por 2: $\frac{x+4}{2}$. Assim: $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}$

Analiticamente, seguindo o processo atrás definido, sendo $f(x) = 2x - 4$, temos:

- $2x - 4 = y \Leftrightarrow 2x = y + 4 \Leftrightarrow x = \frac{y+4}{2}$
- $x = \frac{y+4}{2} \Rightarrow y = \frac{x+4}{2}$

Então, tem-se: $f(x) = 2x - 4 \wedge f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}$



☞ Observações

Os gráficos são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares (x=y). Esta é uma característica que permite obter o gráfico da inversa que uma qualquer função f (bijetiva). Na imagem acima temos a representação correspondente ao exemplo anterior.

Exemplo

- Considerando a função definida por $h(x) = \frac{\sqrt[3]{x-1}+2}{5}$ obtemos, analiticamente:

$\frac{\sqrt[3]{x-1}+2}{5} = y \Leftrightarrow ....$

Trocando de variável temos: $h^{-1}(x) = ...$

- Sendo $g(x) = \frac{2x-1}{x+3}$, cujo domínio é ......, para obtermos o seu contradomínio analiticamente, deveremos determinar o domínio da sua inversa. Assim:

$\frac{2x-1}{x+3} = y \Leftrightarrow ....$

Sendo $g^{-1}(x) = ...$ podemos afirmar que como $D_{g^{-1}} =$...... então $D'_g =$.....

Fontes: Filomena Soares e Paula Nunes – 2000 - 2016 Textos de Apoio de várias UCs de Matemática – ESEIG/IPP