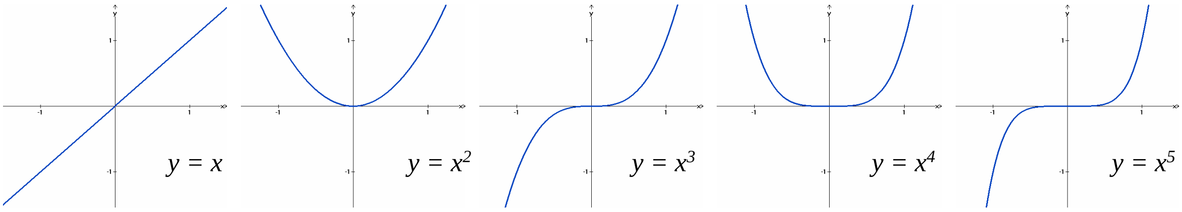
FUNÇÕES EXPONENCIAIS E FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Antes de prosseguirmos para a análise e estudo deste tipo de funções, convém fazer uma breve referência ao que podemos designar por:

FUNÇÕES POTÊNCIA – Funções do tipo $f(x) = x^p$, onde p é uma constante.

Podemos distinguir alguns casos particulares:

- $f(x) = x^n$, onde n é uma constante inteira positiva ($n \in \mathbb{N}$).



Para $n > 1$ a forma do gráfico depende de n ser par ou ímpar. Para os valores pares os gráficos assemelham-se a uma parábola (embora não o sejam), enquanto para os valores ímpares os gráficos são semelhantes ao de uma cúbica.

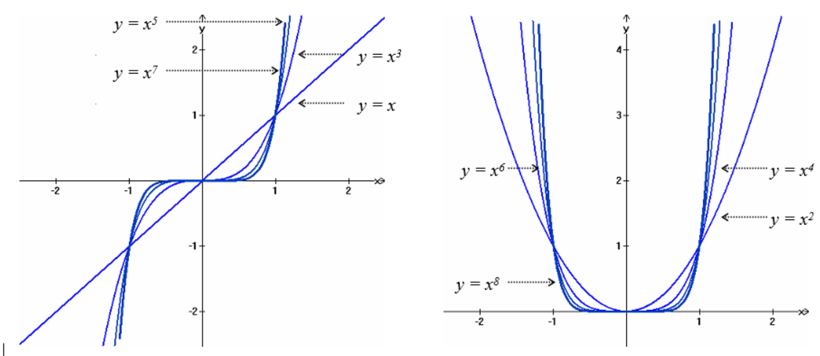
Observações

- Quando n é par, os gráficos deste tipo de funções são simétricos relativamente ao eixo Oy, isto é, as funções do tipo $f(x) = x^n$ com n par são funções pares. Quando n é ímpar, os gráficos deste tipo de funções são simétricos relativamente à origem, isto é, estas funções são ímpares.

- Para todos os valores de n os gráficos passam pela origem e pelo ponto de coordenadas $(1,1)$. Quando n é par, todos os gráficos passam pelo ponto de coordenadas $(-1,1)$ enquanto que, se n for ímpar os gráficos passam pelo ponto de coordenadas $(-1,-1)$.

- Quando n aumenta, o gráfico representativo destas funções fica mais achatado no intervalo $]-1,1[$, crescendo ou decrescendo mais abruptamente para $x < -1$ e $x > 1$.

- São funções contínuas de domínio $\mathbb{R}$.

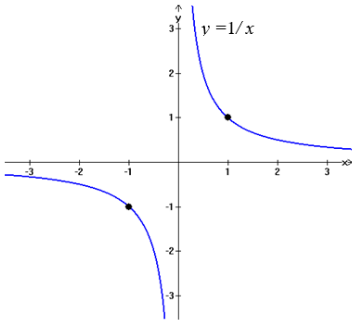


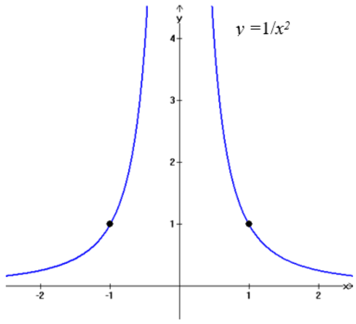
$f(x) = x^n$ (n ímpar) $f(x) = x^n$ (n par)

➡ $f(x)=x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$, onde n é uma constante inteira positiva ($n\in\mathbb{N}$).

Na figura ao lado estão representados os gráficos das funções $f(x)=\frac{1}{x}$ e $f(x)=\frac{1}{x^2}$

O gráfico representativo da função $f(x)=\frac{1}{x}$ designa-se por hipérbole equilátera.



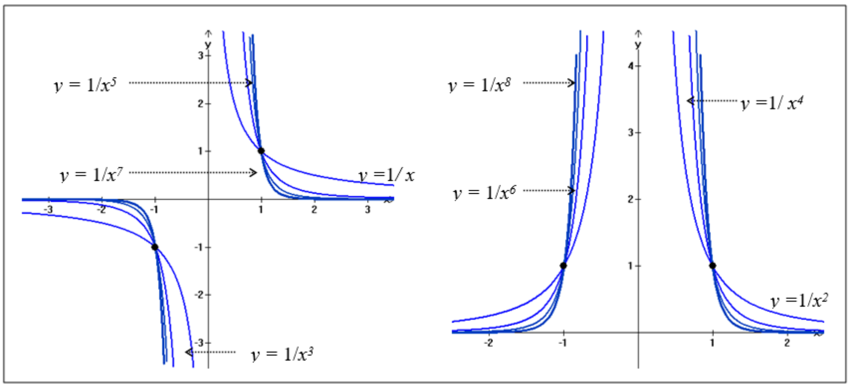


☞ Observações

- Quando n é ímpar, os gráficos têm o mesmo aspeto geral do gráfico representativo de $f(x)=\frac{1}{x}$. Estes são simétricos relativamente à origem, isto é, as funções são ímpares. - Quando n é par os gráficos têm o mesmo aspeto geral do gráfico representativo de $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Estes são simétricos relativamente ao eixo Oy, isto é, as funções são pares.

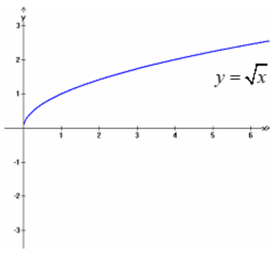
- Para todos os valores de n os gráficos têm um ponto de descontinuidade na origem e passam pelo ponto de coordenadas $(1,1)$. Quando n é par, todos os gráficos passam pelo ponto de coordenadas $(-1,1)$ enquanto que, se n for ímpar os gráficos passam pelo ponto de coordenadas $(-1,-1)$.

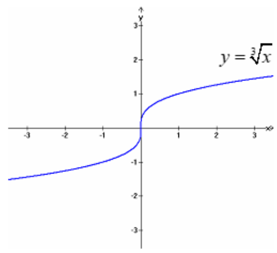
- São funções contínuas de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.



➡ $f(x)=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$, onde n é uma constante inteira positiva ($n\in\mathbb{N}$).

Em particular, se $n=2$ teremos a raiz quadrada $f(x)=\sqrt{x}$ e para $n=3$ teremos a raiz cúbica: $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Na figura ao lado estão representados os gráficos destas duas funções.





Com n par são contínuas de domínio $\mathbb{R}_0^+$, enquanto que se n ímpar têm domínio $\mathbb{R}$. Com a devida atenção algumas caraterísticas são similares às apontadas nos casos anteriores.

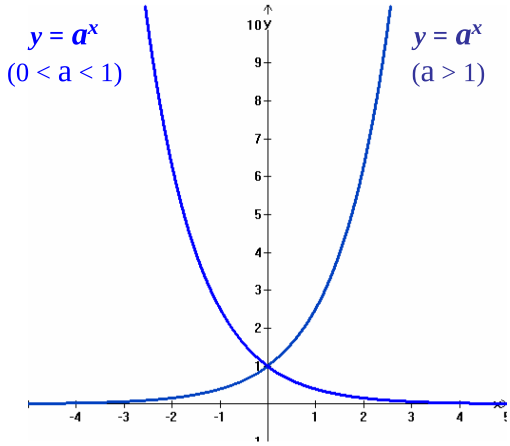
FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Definição

Uma **função exponencial** é uma função do tipo

$$f(x) = a^x$$

onde $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ e $x \in \mathbb{R}$



As funções exponenciais têm um dos "aspetos básicos" ilustrados na figura ao lado, dependo de ser ter: $0 < a < 1$ ou $a > 1$.

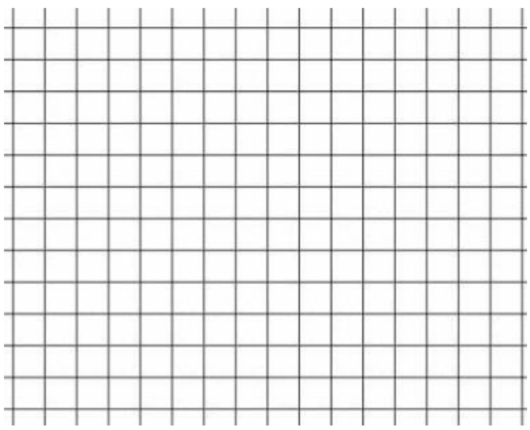
Observações

- Qualquer função exponencial tem uma **base constante** e um **expoente variável**. NÃO CONFUNDIR com funções potência do tipo $f(x) = x^n$, onde a base é variável e o expoente é constante!
- Mostra-se que qualquer função exponencial é uma função de domínio $\mathbb{R}$, contínua e com contradomínio $\mathbb{R}^+$.
- Se $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$, então a função a^x é constante uma vez que $a^x = 1^x = 1$, não se incluindo na família das funções exponenciais.

Exemplo

- Considere a função $f(x) = 2^x$, exponencial de base $a = ...$ e a função $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ de base $a = ...$. Complete a tabela abaixo e esboce os gráficos correspondentes no "quadriculado".

x	2^x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-2		
-1		
0		
1		
2		

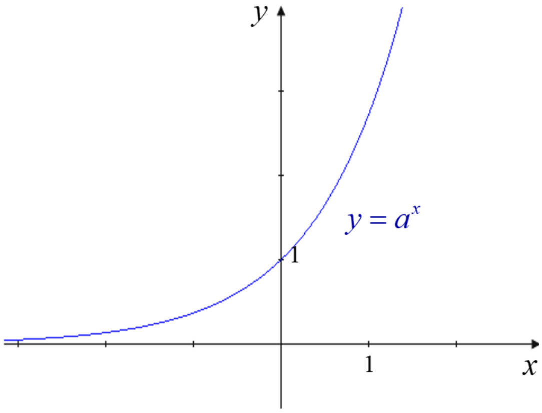


Neste caso temos duas funções de domínio ……… e cujo contradomínio é …………….

Em termos de monotonia, f é .... e g é ....

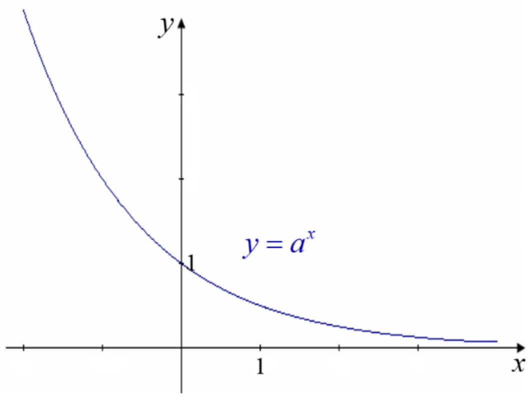
Genericamente podemos dizer que existem dois tipos de funções exponenciais, com as seguintes caraterísticas:

$$a>1$$



Domínio	
Contradomínio	
Zeros	
Sinal	
Injetiva (?)	
Sobrejetiva (?)	
Extremos	
Ordenada na origem	
Monotonia	
Continuidade	
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(a^x\right)$	
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a^x\right)$	

$$0<a<1$$



Domínio	
Contradomínio	
Zeros	
Sinal	
Injetiva (?)	
Sobrejetiva (?)	
Extremos	
Ordenada na origem	
Monotonia	
Continuidade	
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(a^x\right)$	
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a^x\right)$	

Entre as funções exponenciais devemos destacar a **função exponencial natural**. Assim, consideremos <u>o número de Neper</u>, e, isto é, o número definido como:

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

e cujo valor, com 15 casas decimais, é $e \approx 2{,}718282828459045$

Exemplo

Apenas a título de curiosidade, considerando a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, verifique o que acontece ao seu valor quando n cresce "indefinidamente" (isto é, quando $n \to +\infty$), preenchendo a tabela ao lado... algo "estranho" acontece, o seu valor está a "convergir" para um determinado valor, irracional (dízima infinita não periódica)!... este é o número de Neper: e

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
10	$(1,1)^{10}$	2,593742...
100	$(1,01)^{100}$	2,704813...
1000	$(1,001)^{1000}$	
10000	$(1,0001)^{10000}$	
100000	$(1,00001)^{100000}$	2,718268...
1000000	$(1,000001)^{1000000}$	

Definição

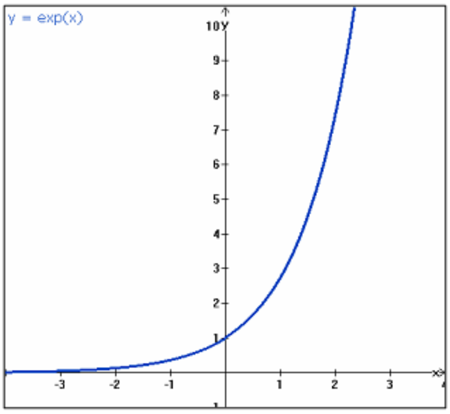
Uma **função exponencial natural**, denotada por ***exp*** é a função da forma

$$f(x) = exp(x) = e^x$$

onde e é o número de Neper e $x \in \mathbb{R}$

☞ Observações

Note-se que, tal como as restantes exponenciais, esta função tem domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}^+$, apresentando todas as caraterísticas de uma exponencial com base superior a 1 ($e > 1$).



Relembremos, mais uma vez, algumas notações e propriedades operatórias das potências, sem qualquer numeração específica:

P1. $a^0 = 1$ **P2.** $a^x a^y = a^{x+y}$ **P3.** $(ab)^x = a^x b^x$

P4. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ **P5.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$ **P6.** $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

P7. $\sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}}$ **P8.** $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$ **P9.** $a^{x^y} = a^{\left(x^y\right)}$

Exemplo

Considere a função $f(x) = 3^{x-1}$. Complete:

- O Domínio desta função é $D_f = \ldots\ldots\ldots$
- $f(1) = \ldots$
- $f(x) = 81 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 81 \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow x = \ldots$

Resolva as seguintes equações exponenciais:

- $10^{1-x} = \dfrac{1}{10}$ .... $\Leftrightarrow x = 2$
- $3^{x-5} = 27^{1-x}$ .... $\Leftrightarrow x = 2$
- $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x-1} = \dfrac{125}{8}$ .... $\Leftrightarrow x = -2$
- $9^{x-2} = \sqrt{27}$ .... $\Leftrightarrow x = \dfrac{11}{4}$
- $2^{x-3} + 2^{x-1} + 2^x = 52$ ....

  .... $\Leftrightarrow x = 5$

FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Como se pode constatar, as funções exponenciais, para qualquer valor da base a, são funções injetivas, logo admitem inversa. Como o contradomínio destas funções é, em todos os casos, $\mathbb{R}^+$, o domínio das funções inversas das exponenciais será, também, $\mathbb{R}^+$.

À inversa de uma função exponencial chama-se **função logarítmica**, assim definida:

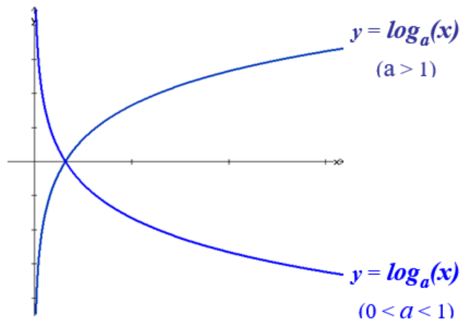
Definição

A **função logarítmica**, denotada por ***log**$_a$*, é definida como

$$f(x) = y = log_a(x) \quad \text{se e só se} \quad x = a^y$$

onde $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

As funções logarítmicas têm um dos aspetos básicos ilustrados na figura ao lado, dependo de se ter: $0 < a < 1$ ou $a > 1$.

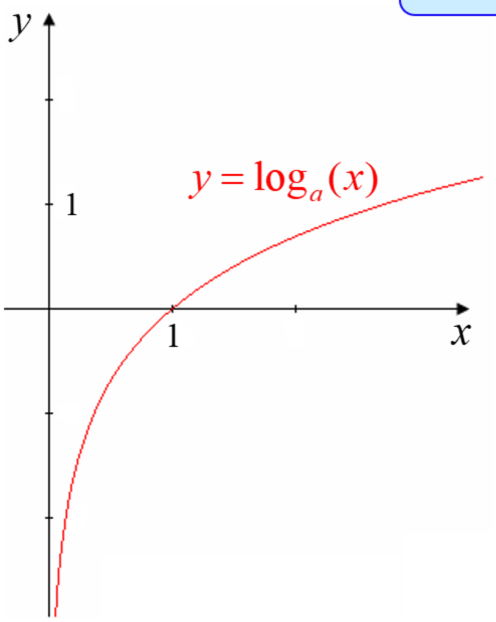


Observações

O "significado" de logaritmo (função logarítmica) só faz sentido quando pensado como inverso da exponencial correspondente (com a mesma base). Por exemplo, se a pergunta for: "Qual o valor de $log_2(8)$, o raciocínio a realizar será pensar "a que número devo elevar 2 para obter 8", isto é: "$2^x = 8 \Leftrightarrow x = ?$" (ver definição). Este é um tipo de raciocínio análogo ao que realizamos quando pretendemos calcular, por exemplo, o valor de $\sqrt{25}$. Mentalmente, sem qualquer máquina, a resposta é rápida: "5". No entanto, o que pensamos não foi em "extrair a raiz de 25", mas pensar qual o número que multiplicado por ele próprio (ao quadrado) daria 25, daí o 5 (5x5=25), sim?... Logo, é um "erro" procurar compreender logaritmos sem qualquer conexão direta e obrigatória com a sua exponencial inversa! Assim: $log_2(8) = ...$ porque $2^{.....} = 8$!

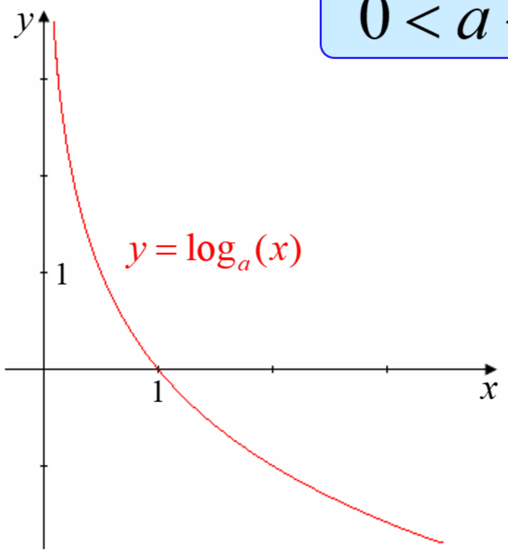
Analogamente ao que foi feito para as funções exponenciais, e de um modo genérico, podemos dizer que existem dois tipos de funções logarítmicas, com as seguintes caraterísticas:

$$a > 1$$



Domínio	
Contradomínio	
Zeros	
Sinal	
Injetiva (?)	
Sobrejetiva (?)	
Extremos	
Ordenada na origem	
Monotonia	
Continuidade	
$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x)$	
$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a(x)$	

$$0 < a < 1$$



Domínio	
Contradomínio	
Zeros	
Sinal	
Injetiva (?)	
Sobrejetiva (?)	
Extremos	
Ordenada na origem	
Monotonia	
Continuidade	
$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x)$	
$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a(x)$	

☞ Observações

Como a inversa da função exponencial é a função logarítmica (com a mesma base), e vice-versa, podemos escrever

- $log_a\left(a^x\right) = x$ se $x \in \mathbb{R}$ (domínio da exponencial)
- $a^{log_a(x)} = x$ se $x \in \mathbb{R}^+$ (domínio da logarítmica)

Analisemos agora a **função logarítmica natural**. Esta função não é mais do que a inversa da função exponencial natural, isto é, a função logarítmica cuja base é o número de Neper e. Esta função é usualmente representada por ***ln*** em vez de log_e. Temos então:

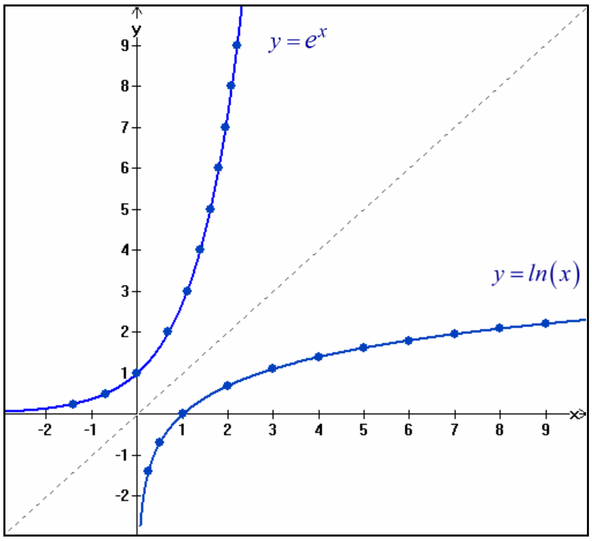
Definição

A **função logarítmica natural**, denotada por ***ln***, é definida como

$$f(x) = y = ln(x) \quad \text{se e só se} \quad x = e^y$$

onde $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ e e é o número de Neper

Na figura abaixo podemos ver os gráficos representativos das funções exponencial e logarítmica naturais, onde é visível a relação entre estas (ver também a tabela). Lembremos que quando duas funções são inversas, os gráficos representativos são simétricos relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.



x	$y = \ln(x)$	x	$y = e^x$
0.25	-1.39	-1.39	0.25
0.50	-0.69	-0.69	0.50
1	0	0	1
2	0.69	0.69	2
3	1.10	1.10	3
4	1.39	1.39	4
5	1.61	1.61	5
6	1.79	1.79	6
7	1.95	1.95	7
8	2.08	2.08	8
9	2.20	2.20	9

A relação de inversão entre estas duas funções permite-nos escrever:

- $ln\,(e^x) = x$ se $x \in \mathbb{R}$

- $e^{ln(x)} = x \quad \text{se } x \in \mathbb{R}^+$

Vejamos algumas **propriedades dos logaritmos**:

P1. $log_a(x.y) = log_a(x) + log_a(y)$ - Logaritmo de um produto

P2. $log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$ - Logaritmo de um quociente

P3. $log_a\left(x^y\right) = y.log_a(x)$ - Logaritmo de uma potência

P4. $log_a(x) = \frac{log_b(x)}{log_b(a)}$ - Mudança de base de logaritmo

P5. $log_a(x) = \frac{1}{log_x(a)}$ - Troca entre base e argumento

☞ Observações

Para indicar o logaritmo natural escrevemos *ln*, para indicar um **logaritmo de base 10** escreve-se usualmente ***log*** (sem qualquer referência à base). Todos os outros valores da base da função logarítmica, que não o 10, deverão ser numericamente assinalados, caso contrário, estando apenas *log*, considera-se sempre a base decimal. Esta forma de representação deve-se, essencialmente à generalização do uso da máquina de calcular que apenas possui as funções LOG e LN. LOG representa, assim, a função logarítmica de base 10 e LN representa a função de base e (logaritmo natural ou Neperiano).

Podemos ainda, para terminar, efetuar uma pequena análise comparativa de algumas das suas características:

Comparação entre funções exponenciais e logarítmicas

$a^0 = 1$	$log_a(1) = 0$
$a^1 = a$	$log_a(a) = 1$
$D_{a^x} = \mathbb{R}$	$D'_{log_a(x)} = \mathbb{R}$
$D'_{a^x} = \mathbb{R}^+$	$D_{log_a(x)} = \mathbb{R}^+$

Quando a >1

$0 < a^x < 1$ se $x < 0$	$log_a(x) < 0$ se $0 < x < 1$
a^x é crescente	$log_a(x)$ é crescente

Quando 0<a <1

- $0 < a^x < 1$ se $x > 0$
- a^x é decrescente
- $log_a(x) > 0$ se $0 < x < 1$
- $log_a(x)$ é decrescente

Exemplo

Considere a função $f(x) = log_3(2x-1)$. Complete:

- A condição que define o domínio desta função é…………………, logo $D_f = \ldots\ldots\ldots$
- $f(5) = \ldots$
- $f(x) = 4 \Leftrightarrow log_3(2x-1) = 4 \underset{Definição}{\Leftrightarrow} 2x-1 = 3^{\cdots} \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow x = \ldots$

Resolva as seguintes equações logarítmicas - atenção à verificação das soluções, ou seja, ao domínio da expressão:

- $log_3\left(x^2 - 8x\right) = 2 \underset{Def}{\Leftrightarrow} x^2 - 8x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

  $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 9$
- $log_k(x).log_4(k) = 2 \underset{Prop.}{\Leftrightarrow} \_\_\_\_\_\_ .log_4(k) = 2 \underset{Def.}{\Leftrightarrow} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow x = 16$

Fontes: Filomena Soares e Paula Nunes – 2000 - 2016 Textos de Apoio de várias UCs de Matemática – ESEIG/IPP