FUNÇÕES EXPONENCIAIS E FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

1. Sem recorrer à máquina de calcular, determine o resultado (numérico ou simplificado) das seguintes expressões:

1.1. $(-3)^5$ **1.2.** $(-4)^2$ **1.3.** -4^2 **1.4.** $0{,}2^2$ **1.5.** $a^{2x}.a^{5x}$ **1.6.** $a^{x-1}.a^{x+1}$

1.7. $\left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$ **1.8.** $\left(2^{\sqrt{2}+1}\right)^{\sqrt{2}-1}$ **1.9.** $\left(a^{2x}\right)^{3x}$ **1.10.** $\dfrac{2^{x+y}.2^{2x-y}}{2^{3x-y}}$ **1.11.** $\dfrac{5^4\cdot 5^7\cdot 5^{10}}{5\cdot 5^{12}\cdot 5^8}$ **1.12.** $\dfrac{5^7-5^6+5^5}{5^6+2\times 5^5}$

2. Sem recorrer à máquina de calcular, resolva as seguintes equações:

2.1. $2^x=\dfrac{1}{8}$ **2.2.** $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x=-\dfrac{81}{256}$ **2.3.** $3^{2x-1}=1$ **2.4.** $3^x=\sqrt[4]{27}$

2.5. $2^{x-1}=32^{2x}$ **2.6.** $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x+5}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+4}$ **2.7.** $\dfrac{2^{3x-7}}{2^x}=0{,}5$ **2.8.** $3^x+3^{x-1}=11+3^{x-2}$

3. Sem recorrer à máquina de calcular, indique o conjunto solução das seguintes inequações:

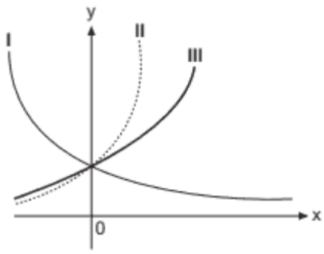
3.1. $3^x>81$ **3.2.** $\left(\dfrac{4}{5}\right)^x\geq\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-3}$ **3.3.** $4^{2x+5}\geq 64$ **3.4.** $0{,}1^{4x-7}<0{,}01^{x-2}$

3.5. $81^{x+2}\leq 3$ **3.6.** $\left(7^{x^2-3}\right)^2<49^{-1}$ **3.7.** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3x-4}<1$ **3.8.** $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2x(1-x)}<\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x-1}$

4. Sabendo que na imagem ao lado gráficos I, II e III representam, respetivamente, as funções $y=a^x$, $y=b^x$ e $y=c^x$, indique a afirmação correta:

(A) $0<a<b<c$ (B) $0<b<c<a$ (C) $0<b<a<c$

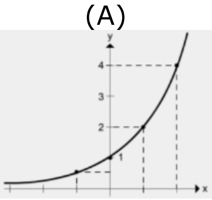
(D) $0<a<c<b$ (E) $a<0<c<b$ (F) $a<0<b<c$



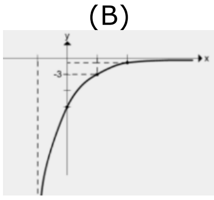
5. Estabeleça uma correspondência entre as seguintes funções exponenciais e seus gráficos.

5.1. $y=5^{x+2}$ **5.2.** $y=-3^{2-x}$ **5.3.** $y=0{,}2^{x-1}$ **5.4.** $y=4^{\frac{x}{2}}$ **5.5.** $y=\left(\dfrac{1}{8}\right)^{2-3x}$

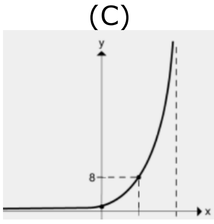
(A)



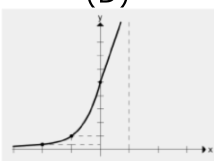
(B)



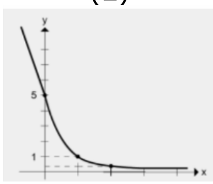
(C)



(D)



(E)



6. Determine o domínio das seguintes funções:

6.1. $f(x)=\dfrac{x}{2^x-8}$ **6.2.** $g(x)=\dfrac{x}{3^x+9}$ **6.3.** $h(x)=\sqrt{16^x-2}$ **6.4.** $i(x)=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^x}$

7. Das seguintes afirmações, diga, justificando, quais são falsas.:

(A) A função $f(x)=(-3)^x$ é uma função exponencial.

(B) A função $f(x)=x^2$ é uma função exponencial.

(C) A função $f(x)=3^x$ é uma função invertível.

(D) Se $3^x=-\frac{1}{27}$, então $x=-3$.

(E) Se $f(x)=e^x$, então $f(0,5)=\sqrt{e}$.

(F) A função exponencial $f(x)=a^x$, a > 0 e a ≠ 1 é uma função decrescente.

(G) Se $f(x)=log_2(x))$, então $f^{-1}(x)=2^x$.

(H) $e^{ln(x)}=x$, para todo o número x real.

(I) A função $f(x)=2^x+2^{-x}$ é idêntica à função $g(x)=2^0$.

8. Calcule, por definição (sem utilizar a máquina de calcular), o valor de:

8.1. $log_{20}(400)$ **8.2.** $log_2\left(\frac{1}{16}\right)$ **8.3.** $log_{\frac{1}{4}}(32)$ **8.4.** $log(1000)$

8.5. $log_8(16)$ **8.6.** $log_9(27)$ **8.7.** $log_{\frac{1}{5}}(125)$ **8.8.** $log(1)$

9. Utilize as propriedades dos logaritmos para escrever as seguintes expressões como somas, diferenças e/ou produtos (suponha que a, b e c são números reais positivos) :

9.1. $log_5\left(\frac{5a}{bc}\right)$ **9.2.** $log\left(\frac{b^3}{10a}\right)$ **9.3.** $log_3\left(\frac{a^2b}{c}\right)$ **9.4.** $log_2\left(\frac{16b}{a^2c^3}\right)$

9.5. $ln\left(a^3\sqrt{b}\right)$ **9.6.** $log_2\left(\frac{4\sqrt[3]{c}}{\sqrt{b}}\right)$ **9.7.** $ln\left(\sqrt{\frac{b^3}{a^5}}\right)$ **9.8.** $ln\left(e^3a^{-2}\right)$

10. Simplifique as seguintes expressões escrevendo-as à custa de, apenas, um logaritmo:

10.1. $ln(5)+ln(x)$ **10.2.** $log\left(x^6\right)-2\,log(x)$ **10.3.** $3\,ln\left(\frac{1}{2}\right)$ **10.4.** $ln(10)+ln(4)-ln(8)$

11. Se $log_4(a)=x$ escreva, em função de x, os seguintes logaritmos:

11.1. $log_4(4a)$ **11.2.** $log_4\left(\frac{a}{2}\right)$ **11.3.** $log_4\left(\frac{1}{a}\right)$ **11.4.** $log_4\left(a^3\right)$ **11.5.** $log_4\left(8\sqrt{a}\right)$

12. Simplifique as expressões:

12.1. $e^{5\,ln(x)}$ **12.2.** $e^{3\,ln(x)+2\,ln(y)}$ **12.3.** $e^{\frac{1}{2}ln(x)}$ **12.4.** $e^{ln(x)}+e^{3\,ln(x)}$ **12.5.** $e^{3+ln(x)}-e^{3-ln(x)}$

13. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

13.1. $\log_{\frac{1}{2}}(x)=4$ **13.2.** $\log_{\sqrt{2}}(x+2)=6$ **13.3.** $log_2(log_4(x))=-1$ **13.4.** $\log_7(3x-4)-\log_7(x)=0$

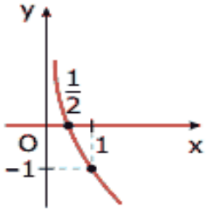
14. Determine o conjunto solução das seguintes inequações:

14.1. $\log_3(2x+1) > \log_3(7)$ **14.2.** $\log_{\frac{1}{2}}(2x+1) > \log_{\frac{1}{2}}(9)$ **14.3.** $log_2(x+2) \leq log_2(3)$

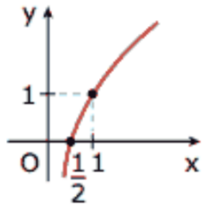
15. Estabeleça uma correspondência entre as seguintes funções exponenciais e seus gráficos.

15.1. $y = \log_2(2x)$ **15.2.** $y = \log_2(x^2)$ **15.3.** $y = \log_2(x)$ **15.4.** $y = \log_2(6x-4)$ **15.5.** $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x)$

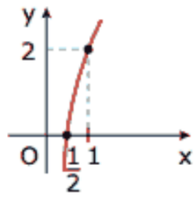
(A)



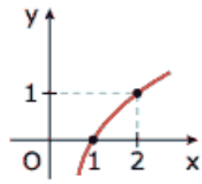
(B)



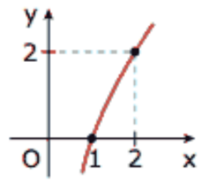
(C)



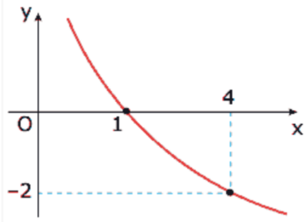
(D)



(E)



16. Na imagem ao lado está representada uma função logarítmica de base "a". Indique o seu valor.

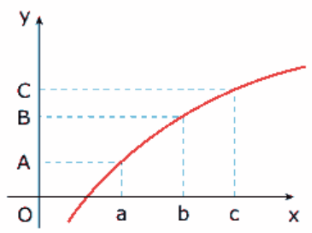


17. Na imagem ao lado está representada uma função $y = \log(x)$.

Sabendo que $\overline{AO} = \overline{BC}$, podemos afirmar que (escolha uma opção):

(A) $\log(a.b) = c$ (B) $a + b = c$ (C) $a^c = b$

(D) $ab = c$ (E) $10^a + 10^b = 10^c$



18. Considere a função $f(x) = 5 - \ln(e - x)$. Determine:

18.1. O domínio.

18.2. Os zeros.

18.3. A solução da condição $f(x) < 2$

18.4. Caraterize a função inversa.

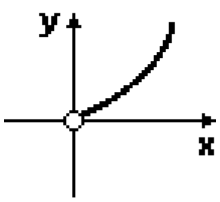
19. Considere as funções definidas por: $f(x) = 2 - 2e^{1-x}$ e $g(x) = 3 + ln(x+1)$.

19.1. Determine os domínios de f e g

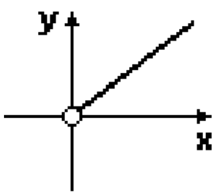
19.2. Determine a expressão analítica das funções inversas de f e g, e caracterize-as.

20. Indique qual o gráfico que representa a função $f(x) = 2^{log_2(x)}$.

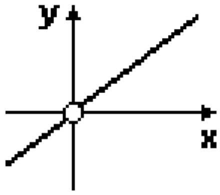
(A)



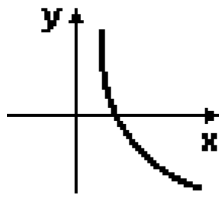
(B)



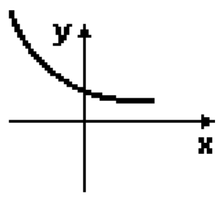
(C)



(D)



(E)



Soluções:

1.

1.1 -243 **1.2** 16 **1.3** -16 **1.4** $0{,}04$ **1.5** a^{7x} **1.6** a^{2x}

1.7 125 **1.8** 2 **1.9** a^{6x^2} **1.10** 2^y **1.11** 1 **1.12** 3

2.

2.1 -3 **2.2** impossível **2.3** $\frac{1}{2}$ **2.4** $\frac{3}{4}$ **2.5** $-\frac{1}{9}$ **2.6** $\frac{1}{3}$ **2.7** 3 **2.8** 2

3.

3.1 $]4,+\infty[$ **3.2** $]-\infty,-3]$ **3.3** $[-1,+\infty[$ **3.4** $]\frac{3}{2},+\infty[$

3.5 $]-\infty,-\frac{7}{4}]$ **3.6** $]-2,2]$ **3.7** $]\frac{4}{3},+\infty[$ **3.8** $]-\frac{1}{2},1[$

4. (D)

5.

5.1 (D) **5.2** (B) **5.3** (E) **5.4** (A) **5.5** (C)

6.

6.1 $D_f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$ **6.2** $D_g = \mathbb{R}$ **6.3** $D_h =]\frac{1}{4},+\infty[$ **6.4** $D_g = \mathbb{R}^+$

7. (A) porque a base não pode ser negativa;
(B) é uma função potência (base não é constante);
(D) a equação é impossível (exponencial não assume valores negativos) a solução estaria correta se fosse ...=1/27.
(F) só é decrescente para valores entre 0 e 1, é crescente de a>1;
(H) a simplificação é válida mas apenas para valores de x positivos;
(I) $2^x + 2^{-x} = 2^x + \dfrac{1}{2^x} \neq 2^0$

8.

8.1 2 **8.2** - 4 **8.3** $-\frac{5}{2}$ **8.4** 3 **8.5** $\frac{4}{3}$ **8.6** $\frac{3}{2}$ **8.7** -3 **8.8** 0

9.

9.1 $1 + \log_5(a) - \log_5(b) - \log_5(c)$ **9.2** $3\log(b) - 1 - \log(a)$

9.3 $2\log_3(a) + \log_3(b) - \log_3(c)$ **9.4** $4 + \log_2(b) - 2\log_2(a) - 3\log_2(c)$

9.5 $3\ln(a) + \frac{1}{2}\ln(b)$ **9.6** $2 + \frac{1}{3}\log_2(c) - \frac{1}{2}\log_2(b)$

9.7 $\frac{3}{2}\ln(b) - \frac{5}{2}\ln(a)$ **9.8** $3 - 2\ln(a)$

10.

10.1 $\ln(5x)$ **10.2** $\log(x^4)$ **10.3** $-\ln(8)$ **10.4** $\ln(5)$

11.

11.1 $x+1$ **11.2** $x - \dfrac{1}{2}$ **11.3** $-x$ **11.4** $3x$ **11.5** $\dfrac{x+3}{2}$

12.

12.1 x^5 **12.2** x^3y^2 **12.3** $\sqrt{x}$ **12.4** $x + x^3$ **12.5** $e^3\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)$

13.

13.1 $\frac{1}{16}$ **13.2** 6 **13.3** 2 **13.4** 2

14.

14.1 $]3,+\infty[$ **14.2** $\left]-\frac{1}{2},4\right[$ **14.3** $]-2,1]$ **14.4** 2

15.

15.1 (B)   **15.2** (E)   **15.3** (D)   **15.4** (C)   **15.5** (A)

16. $a=\frac{1}{2}$

17. (D)

18.

18.1 $D_f=]-\infty,e[$ **18.2** $x=e^5-e$ **18.3** $\left]-\infty,e-e^3\right[$ **18.4** $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}\,;\,D'_{f^{-1}}=]-\infty,e[$

$f^{-1}(x)=e-e^{5-x}$

19.

19.1 $D_f=\mathbb{R}\,;\,D_g=]-1,+\infty[$ **19.2** $f^{-1}(x)=1-\ln\left(\frac{2-x}{2}\right)$ $D_{f^{-1}}=]-\infty,2[\,;\,D'_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

$g^{-1}(x)=e^{x-3}-1$ $D_{g^{-1}}=\mathbb{R}\,;\,D'_{g^{-1}}=]-1,+\infty[$

20. (B)

Fontes: Filomena Soares e Paula Nunes – 2000 - 2016 Textos de Apoio de várias UCs de Matemática – ESEIG/IPP e outros como https://exerciciosweb.com.br/matematica/exercicios-sobre-funcao-logaritmica/ e https://www.professores.uff.br/marinas/wp-content/uploads/sites/51/2017/08/Funo__exponencial_e_logaritmo.pdf