NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITE E CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO

Noção de Limite de uma Função

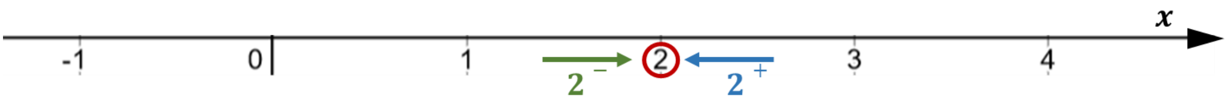
Todos os conceitos fundamentais do Cálculo assentam sobre a noção de limite, nomeadamente as noções de "derivada" ou de "integral", afirmando-se frequentemente que o conceito de limite é um, senão o, mais importante do Cálculo.

Exemplo

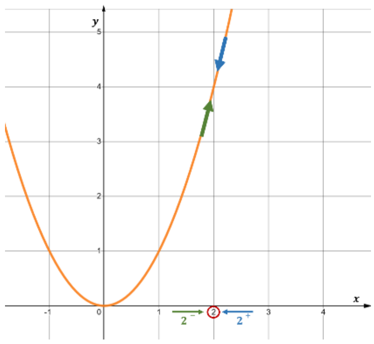
Consideremos a função quadrática $y = x^2$. A questão é:

Se x tender para (se aproximar de) 2, de que valor se aproxima y (a sua imagem)?

- Temos que considerar, aqui, já uma questão importante relativamente aos "caminhos" em IR, uma vez que "tender para 2" pode ser feito de duas formas distintas (ver imagem): "caminhando"
  - da esquerda para a direita (por valores inferiores a 2) ou
  - da direita para a esquerda (por valores superiores a 2)



Assim, no caso desta função $y = x^2$ temos, por exemplo:



$x \to 2^-$	1,8	1,9	1,99	1,999
$y \to ?$	3,24	3,61	3,9601	3,996001

$x \to 2^+$	2,2	2,1	2,01	2,001
$y \to ?$	4,84	4,41	4,0401	4,004001

Logo quando x se aproxima a 2, tanto pela direita como pela esquerda, os valores de y aproximam-se cada vez mais de 4. Podemos exprimir esta ideia do seguinte modo:

- $\lim\limits_{x \to 2^-} x^2 = 4$ - Limite lateral à esquerda, isto é, $x \to 2$ mas $x < 2$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} x^2 = 4$ - Limite lateral à direita, isto é, $x \to 2$ mas $x > 2$

Quando os limites laterais são iguais diz-se que existe limite nesse ponto e tem-se: $\boxed{\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4}$

Observação - Se os limites laterais fossem distintos a função não teria limite nesse ponto, isto é, $\boxed{\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \text{ se e só se } \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)}$

Definição "Intuitiva" de Limite

Dada uma f.r.v.r. f, o limite de f quando x tende para a $(a \in \mathbb{R})$ é o valor para o qual se aproximam as imagens, por f, dos objetos x quando estes se aproximam do valor de a.

Consideremos uma função $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$, e um ponto a $(a \in \mathbb{R})$ não necessariamente pertencente a A. Suponhamos que existe um número $\ell \in \mathbb{R}$ tal que $f(x)$ se "aproxima de ℓ, quando fazemos com que x se "aproxime" de a, com $x \neq a$. Quando isto acontece dizemos que ℓ é o limite de f, em a, e escrevemos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x \to a}{\to} \ell$$

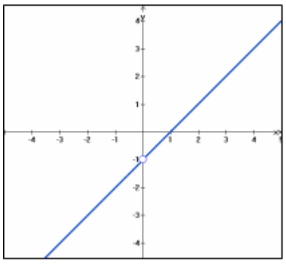
Observações

Note que ao considerarmos o limite de f em a, estamos a ver se é possível saber "para onde vai'' $f(x)$, quando x se "aproxima" de a. Não estamos interessados no valor de $f(a)$, nem mesmo em saber se $f(a)$ existe. A função não tem que estar definida em a para ter limite nesse ponto, e mesmo que esteja definida não é necessário que seja igual ao valor do limite, isto é $f(a)$ <u>pode ser diferente de ℓ</u>, <u>igual a ℓ</u>, <u>não existir ou não estar definida</u>.

Exemplo

Apesar da função $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x}$ não estar definida para $x = ...$, uma vez que $D_f = ...$ tem-se que:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} (x-1) = ...$$



Observações

A ideia/noção fundamental de limite à esquerda (ou à direita) no ponto a é tomarmos $f(x)$ tão próximo de ℓ quanto quisermos, bastando para isso escolher x suficientemente próximo de a mas com $x < a$ (ou $x > a$). Formalmente temos:

Limites Laterais – existência de Limite

- Se $f(x)$ tende para um número real ℓ quando x tende para a, por **valores inferiores** a a, diz-se que ℓ é o limite de f **à esquerda** de a e escreve-se $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$.
- Se $f(x)$ tende para um número real ℓ quando x tende para a, por **valores superiores** a a, diz-se que ℓ é o limite de f **à direita** de a e escreve-se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$.
- Uma **função tem limite num dado ponto** se e só se os limites laterais nesse ponto são iguais.

Exemplos

Para calcularmos o limite da função $f(x) = \begin{cases} 3x-2 \Leftarrow x \leq 3 \\ x-1 \Leftarrow x > 3 \end{cases}$, quando x tende para 3, teremos que calcular os dois limites laterais $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots$ e $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots.$ Podemos concluir que $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$................................

No entanto, se pretendermos calcular o limite da mesma função quando x tende para 10, uma vez que a expressão analítica é a mesma, independentemente do caminho (pela esquerda ou pela direita) pelo qual nos aproximamos de 10, podemos escrever diretamente que $\lim\limits_{x \to 10} f(x) = \lim\limits_{x \to 10} (x-1) = 9$.

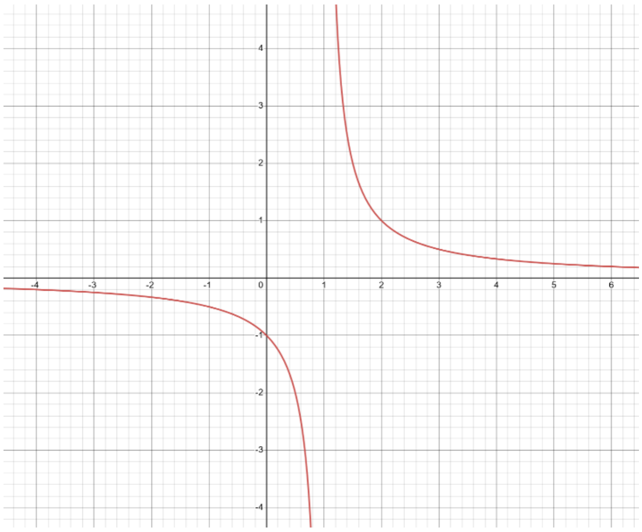
Observações

A noção de limite também é utilizada para estudar o comportamento de uma função quando a variável dependente (x) **aumenta** ou **diminui indefinidamente**, isto é quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. Assim, a definição de limite é extensível nestes casos:

- Se $f(x)$ tende para um número real ℓ quando x tende para $x \to \pm\infty$, diz-se que ℓ é o limite de f e escreve-se $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$.

Exemplos

Considere função $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, de domínio $D_f=\ldots\ldots$, cujo gráfico se encontra representado na imagem ao lado.



Complete a informação em falta:

- $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to 1^{\cdots}} f(x)=\dfrac{1}{\ldots\ldots}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^{\cdots}} f(x)=\dfrac{1}{\ldots\ldots}=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\dfrac{1}{\ldots\ldots}=\ldots\ldots$ $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\dfrac{1}{\ldots\ldots}=\ldots\ldots$

No caso da função $g(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$: $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\dfrac{1}{\ldots\ldots}=\ldots\ldots$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\ldots\ldots$

Observações

Se os limites laterais forem distintos, diremos que o limite da função não existe. Se tivermos limites infinitos diremos que o limite é infinito. No entanto, por não ser finito, este limite, na realidade, não existe.

Quando $x\to+\infty$ ou $x\to-\infty$, o "valor" do limite é calculado por substituição direta atendendo às propriedades operatórias ilustradas na imagem ao lado. Quando estas operações geram indeterminações (ver imagem abaixo) é necessário conhecer e aplicar técnicas específicas e teoremas de apoio que permitam o respetivo cálculo.

Operaçoes na reta acabada $\left(\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}\right)$

$a\pm\infty=\pm\infty$	$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$
$a\times(+\infty)=\begin{cases}+\infty & \text{se } a>0\\ -\infty & \text{se } a<0\end{cases}$	$a\times(-\infty)=\begin{cases}-\infty & \text{se } a>0\\ +\infty & \text{se } a<0\end{cases}$
$(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$ $(-\infty)\times(-\infty)=+\infty$ $(-\infty)\times(+\infty)=-\infty$	$\dfrac{a}{\infty}=0 \quad \dfrac{\infty}{a}=\infty$ $\dfrac{a}{0}=\infty \quad \text{se } a\neq 0$

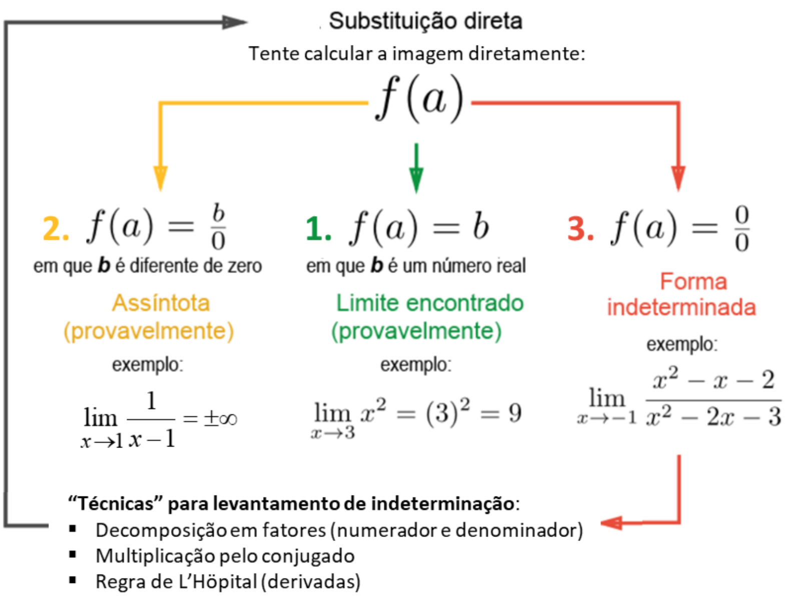
Indeterminações

$+\infty-\infty$	$0\times\infty$	
$\dfrac{\infty}{\infty}$	$\dfrac{0}{0}$	
1^{∞} *	0^{0} *	∞^{0} *

Em termos (muito) gerais podemos "resumir" o processo para o cálculo de limite, quando se pretende **analisar o comportamento da função** quando a variável independente x se aproxima de um determinado valor a.

Nota: Este esquema foi adaptado de https://pt.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-limits-new/ab-1-7/a/limit-strategies-flow-chart

Cálculo do $\lim\limits_{x\to a} f(x)$



No entanto, quando $x\to+\infty$ ou $x\to-\infty$, este esquema (substituição direta) poderá conduzir a indeterminações diferentes cujo levantamento recorre às técnicas acima assinaladas, bem como a outras…

Exemplos

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-2x\right)=\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-2x\right)=\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)=\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x}{x^4-3x+2}=\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x}{3x+2}=\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2^n-1}{3^n+2}\right)=\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right)=\ldots\ldots$

Continuidade de uma Função

Intuitivamente, uma função é contínua se a sua representação geométrica não apresentar "saltos" ou "interrupções".

Definição

Uma função $\boldsymbol{f}$ **é contínua em** $\boldsymbol{a}$ $(a \in \mathbb{R})$ se se verificarem as seguintes condições:

(1) $a \in D_f$ ($f(a)$ está definida)

(2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe (e é finito)

(3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

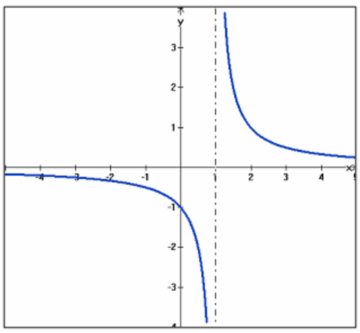
Observações

Se uma (ou mais) das condições da definição não for(em) verificada(s), diz-se que $\boldsymbol{f}$ **é descontínua em** $\boldsymbol{a}$.

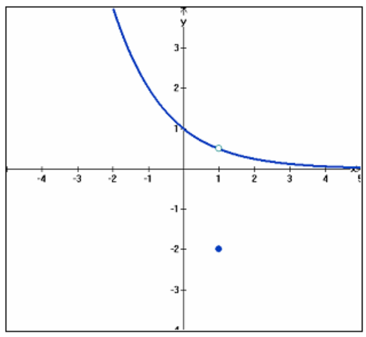
Exemplos

- A função $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, não é contínua no ponto de abcissa .... uma vez que não está definida nesse ponto – falha a 1ª condição (ver imagem (A).
- A função $g(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & \Leftarrow x \neq 1 \\ -2 & \Leftarrow x = 1 \end{cases}$, cujo gráfico se encontra representado na imagem (B) não é contínua em $x = \ldots\ldots$, apesar de aí estar definida ($h(\ldots) = -2$) e de existir $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$. Neste caso temos: $\lim\limits_{x \to \ldots\ldots} h(x) = \ldots\ldots \neq h(\ldots\ldots) = -2$.

(A)



(B)



Proposição

Se f e g são funções contínuas em a $(a \in \mathbb{R})$ então também o são as funções:

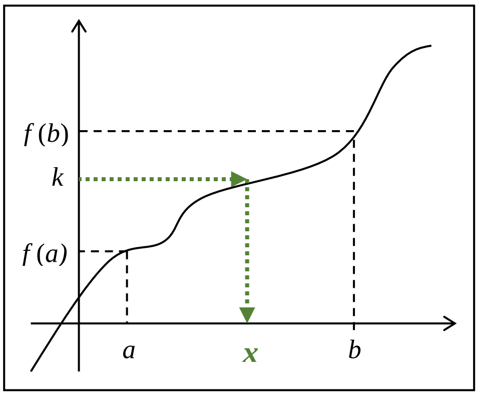
$f+g$ $f-g$ $f.g$ $\dfrac{f}{g}$ desde que $g(a) \neq 0$

Seguem-se dois resultados que nos parecem intuitivos no que às funções contínuas diz respeito, que poderão ser úteis no futuro. O teorema diz-nos que uma função contínua não passa de um valor para outro sem assumir todos os valores intermédios, pelo menos uma vez. O corolário diz-nos que uma função que passa de um valor positivo para um negativo (ou vice-versa) tem que, obrigatoriamente, passar por zero, pelo menos uma vez.

Teorema de Bolzano-Cauchy

Se f é contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e se k é um número entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe pelo menos um $x \in [a,b]$ tal que $f(x)=k$.

A interpretação geométrica deste teorema pode ser vista na figura ao lado.



Como consequência deste teorema podemos ainda enunciar o seguinte:

Corolário de Bolzano-Cauchy

Se f é contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários, então existe pelo menos um zero da função em $]a,b[$, isto é, existe pelo menos um solução para a equação $f(x)=0$.

☞ Observações

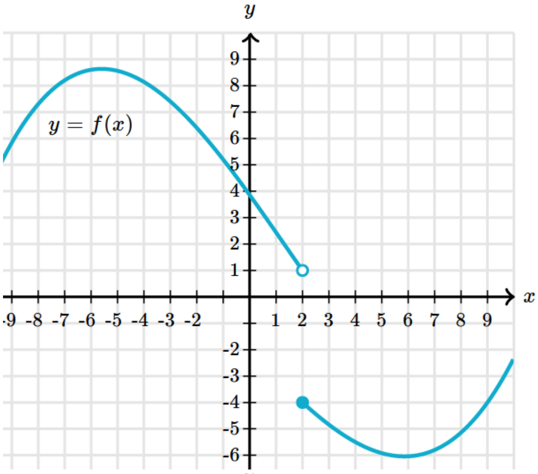
Usando o corolário do teorema, não se consegue calcular o zero nem provar que ele é único, apenas podemos afirmar que ele existe. Note que, se a função não for contínua, estes resultados não têm qualquer utilidade.

Exemplos

- Considere a função $f(x)=x^2-2^x+5$. A equação $f(x)=5$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1,3]$, porque ……………………………….. Esta função tem pelo menos um zero no intervalo $[5,6]$, porque ………………………………..

Voltando à continuidade, em termos gerais, responda às seguintes questões, assinalando, em cada caso, as afirmações corretas.

- Considere a função f , cujo gráfico se encontra representado na imagem ao lado.



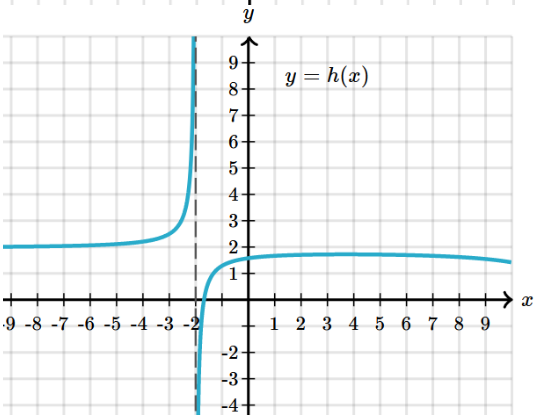
A $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ existem

B $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe

C f é definida em $x=2$

D f é contínua em $x=2$

- Considere a função h, cujo gráfico se encontra representado na imagem ao lado.



A $\lim_{x\to -2^+} h(x)$ e $\lim_{x\to -2^-} h(x)$ existem

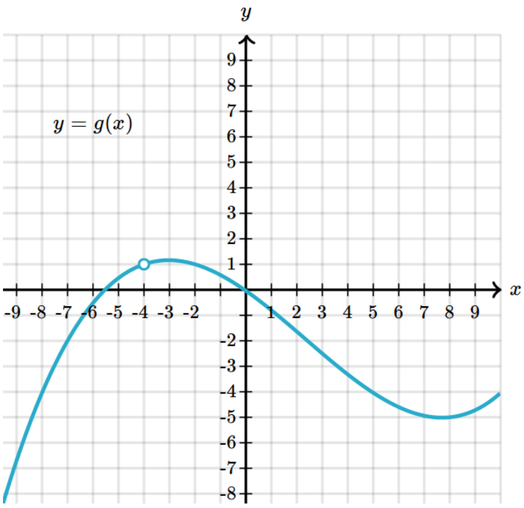
B $\lim_{x\to -2} h(x)$ existe

C h é definida em $x=-2$

D h é contínua em $x=-2$

E Nenhuma das anteriores

- Considere a função g, cujo gráfico se encontra representado na imagem ao lado.



A $\lim_{x\to -4^+} g(x)$ e $\lim_{x\to -4^-} g(x)$ existem

B $\lim_{x\to -4} g(x)$ existe

C g é definida em $x=-4$

D g é contínua em $x=-4$

E Nenhuma das anteriores

Nota: Exemplos adaptados de https://pt.khanacademy.org/math/calculus-all-old/limits-and-continuity-calc/continuity-at-a-point-calc/e/analyze-continuity-at-a-point-graphically

Exemplos

- Considere a função $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} k+e^{-\frac{1}{x}} & ,x>0 \\ (2+x)(2-x) & ,x\leq 0 \end{cases}$, onde k é uma constante real. Calcule:
    - $\lim\limits_{x\rightarrow-\infty} f(x)$
    - $\lim\limits_{x\rightarrow+\infty} f(x)$
    - $\lim\limits_{x\rightarrow 0^-} f(x)$
    - $\lim\limits_{x\rightarrow 0^+} f(x)$
    - O valor de k para o qual a função f contínua em zero.

- Considere a função $g:\mathbb{R}\setminus\{1\}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\begin{cases} ln\left(2+\frac{k}{x}\right) & ,x>1 \\ 1-x^2 & ,x<1 \end{cases}$, onde k é uma constante real. Calcule:
    - $\lim\limits_{x\rightarrow-\infty} g(x)$
    - $\lim\limits_{x\rightarrow+\infty} g(x)$
    - $\lim\limits_{x\rightarrow 1^-} g(x)$
    - $\lim\limits_{x\rightarrow 1^+} g(x)$
    - O valor de k para o qual a função g é "prolongável por continuidade" em zero.

Assíntotas e a sua relação com a noção de Limite

Definição

Diz-se que os gráficos de duas funções reais f e g são assíntotas em $+\infty$ ou $-\infty$ se

$$\lim_{x\rightarrow(\pm)\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=0$$

Assim, em particular, uma reta de equação $y=m.x+b$, com $m,b\in\mathrm{IR}$ (eq. reduzida) é uma reta assíntota ao gráfico de uma função f se $\lim\limits_{x\rightarrow(\pm)\infty}\left(f(x)-m.x-b\right)=0$

Então, para obter a inclinação (declive) m da reta, temos da relação anterior, dividindo por x, $\lim\limits_{x\to(\pm)\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-m-\frac{b}{x}\right)=0$, isto é, $m=\lim\limits_{x\to(\pm)\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$ uma vez que, quando $x\to(\pm)\infty$ se tem $\frac{b}{x}\to 0$. Neste caso pode-se dizer que o gráfico de f possui uma inclinação assintótica de declive m.

Para obter a ordenada na origem, b, basta calcular o limite da diferença $f(x)-m.x$, quando $x\to(\pm)\infty$. Então a reta de equação $y=m.x+b$ é uma reta assíntota ao gráfico de f, se for possível determinar os valores de:

$$m=\lim_{x\to(\pm)\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) \quad \text{e} \quad b=\lim_{x\to(\pm)\infty}\left(f(x)-mx\right)$$

☞ Observações

- Se $\lim\limits_{x\to(\pm)\infty}\left[f(x)\right]=a$, $a\in\mathbb{R}$, então o gráfico representativo da função possui uma assíntota horizontal de equação $y=a$ $\left(\lim\limits_{x\to(\pm)\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\frac{a}{\lim\limits_{x\to(\pm)\infty}x}=0\Rightarrow m=0\right)$.
- Os limites quando $x\to+\infty$ ou $x\to-\infty$ devem ser analisados com cuidado, verificando se, eventualmente, podem ser diferentes – o comportamento assintótico da função pode ser diferente nestes dois casos. Quando não há dúvidas, estes podem ser calculados em "simultâneo".

Referimos aqui, as retas horizontais e oblíquas assíntotas ao gráfico de uma função, não estando em análise as retas verticais que não correspondem à representação geométrica de qualquer função. No entanto, podemos definir:

🕮 Definição

Uma reta vertical de equação $x=a$, com $a\in\mathbb{R}$ é uma reta assíntota ao gráfico de uma função f se quando $x\to a$ se tem que $f(x)\to(\pm)\infty$

☞ Observações

Note-se que, a curva representativa de uma função real f só admite uma assíntota vertical de equação $x=a$ se $a\notin D_f$ e $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]=(\pm)\infty$. Usualmente, estes pontos são referidos como **pontos de descontinuidade infinita**.

Exemplos

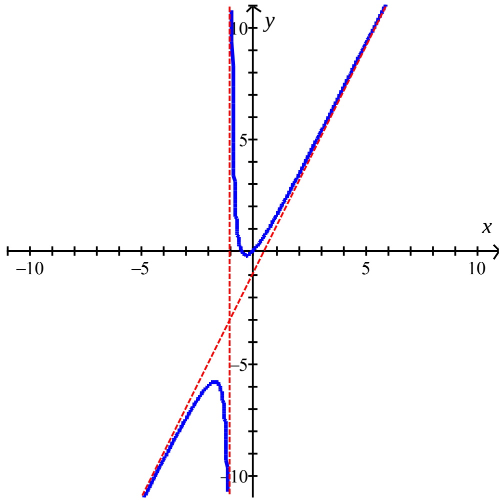
- O gráfico representativo da função definida por $f(x)=\dfrac{2x^2+x}{x+1}$ apresenta uma assíntota oblíqua, cujo declive é:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\text{\_\_\_\_\_\_\_\_}=\ldots\ldots\ldots$$

A ordenada na origem desta reta é:

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

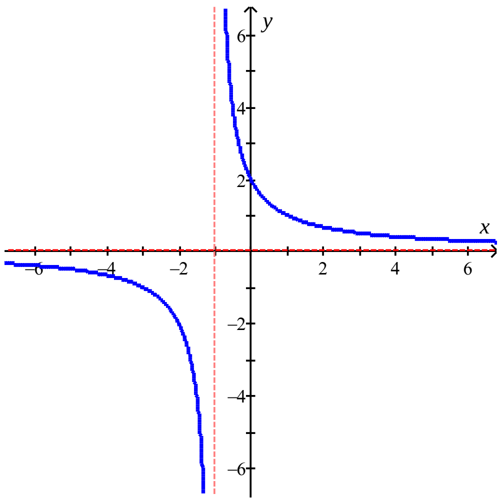
Então a reta de equação .... é uma assíntota não vertical ao gráfico desta função, que possui ainda uma assíntota vertical de equação .... uma vez que $\lim\limits_{x\to\ldots.^{\pm}} f(x)=(\pm)\infty$.



- O gráfico representativo da função definida por $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$ apresenta uma assíntota horizontal de equação $y=\ldots..$ porque, quando $x\to(\pm)\infty$, $f(x)\to 0$ ou calculando, $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\text{\_\_\_\_\_\_\_\_}=\ldots\ldots\ldots$

Logo, a ordenada na origem seria: $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ldots\ldots\ldots\ldots,$ daí a equação da assíntota $y=\ldots\ldots$.

De modo análogo ao exemplo anterior, esta curva tem uma assíntota vertical de equação $x=\ldots\ldots$ (uma vez que quando $x\to\ldots\ldots$ $f(x)\to(\pm)\infty$).



Fontes: Filomena Soares e Paula Nunes – 2000 - 2016 Textos de Apoio de várias UCs de Matemática – ESEIG/IPP