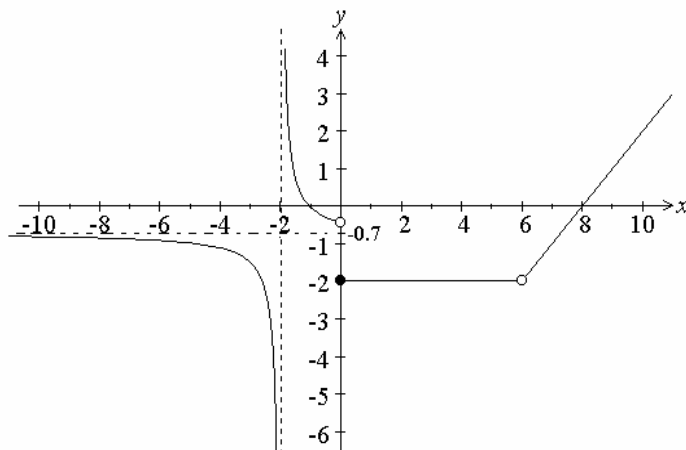


NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITE E CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO

1. Seja a função $h(x)$, uma função real de variável real, representada graficamente por:

Calcule, caso existam, os seguintes limites:



1.1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

1.2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

1.3 $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

1.4 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

1.5 $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$

2. Calcule, se possível, os limites indicados:

2.1. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)$

2.2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x+2}$

2.3. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1)$

2.4. $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3x+1}{5} \right)$

2.5. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^4 - 3x^2)$

2.6. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right)$

2.7. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{9 - x^2}{x - 3} \right)$

2.8. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 - x}{x} \right)$

2.9. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

2.10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

2.11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + x + 1}$

2.12. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1 - x^2}$

2.13. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x)$

2.14. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{-x^2})$

2.15. $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{x - 5}$

2.16. $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{x - 5}$

2.17. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2}$

2.18. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2}$

2.19. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{2-x}$

2.20. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{2-x}$

2.21. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3-x}{x^2}$

2.22. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3-x}{x^2}$

2.23. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x+2} \right)$

2.24. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 2 \right)$

2.25. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+1)$

2.26. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right)$

2.27. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} \right)$

2.28. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} \right)$

2.29. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{x^2 - 1} \right)$

2.30. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x^2 - 1} \right)$

$$2.31. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 + 2x - 1}{3x - 4} \right)$$

$$2.32. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 2x - 1}{3x - 4} \right)$$

$$2.33. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x - 1}{3x + 2} \right)$$

$$2.34. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x - 1}{3x + 2} \right)$$

$$2.35. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - 3} \right)$$

$$2.36. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - 3} \right)$$

$$2.37. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^{x+2}$$

$$2.38. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^{x+2}$$

$$2.39. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2}$$

$$2.40. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+x^2}$$

$$2.41. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ onde } f(x) = \begin{cases} x^2 \Rightarrow x \geq 2 \\ x+1 \Rightarrow x < 2 \end{cases}$$

$$2.42. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ onde } f(x) = \begin{cases} 0 \Rightarrow x = 1 \\ 3x+1 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases}$$

$$2.43. f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{-2x}{3-x}, & \text{se } x < 1 \end{cases} \text{ para } x=1$$

$$2.44. f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{-2x}{3-x}, & \text{se } x < 1 \end{cases} \text{ para } x=2$$

$$2.45. f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{-2x}{3-x}, & \text{se } x < 1 \end{cases} \text{ para } x=0$$

$$2.46. f(x) = \begin{cases} 2x^2-1, & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{4-2x}{x}, & \text{se } x < 0 \end{cases} \text{ para } x=0$$

$$2.47. f(x) = \begin{cases} 2x^2+3x+4, & \text{se } x \geq -1 \\ \frac{x^2+5}{1-x}, & \text{se } x < -1 \end{cases} \text{ para } x=-1$$

$$2.48. f(x) = \begin{cases} \frac{2x-3}{x-2}, & \text{se } x \geq 2 \\ \frac{-2x}{2-x}, & \text{se } x < 2 \end{cases} \text{ para } x=2$$

$$2.49. f(x) = \begin{cases} \frac{2x-3}{x-2}, & \text{se } x \geq 2 \\ \frac{-2x}{2-x}, & \text{se } x < 2 \end{cases} \text{ para } x=-1$$

$$2.50. f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-2}{x-1}, & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{3x+5}{3-x}, & \text{se } x < 1 \end{cases} \text{ para } x=1$$

3. Estude analiticamente a continuidade de cada uma das seguintes funções, nos pontos assinalados:

$$3.1. f(x) = \frac{x^3+2}{x^2+3x+2}, \text{ para } x=2$$

$$3.2. f(x) = \begin{cases} -x-5 \Leftarrow x < -2 \\ x-1 \Leftarrow x \geq -2 \end{cases} \text{ para } x=-2$$

$$3.3. f(x) = \begin{cases} \frac{x+4}{x} \Leftarrow x < -1 \\ 3x^2 \Leftarrow x \geq -1 \end{cases} \text{ para } x=-1$$

$$3.4. f(x) = \begin{cases} x^2+2x-2 \Leftarrow x < 2 \\ -3 \Leftarrow x = 2 \\ x^2+2 \Leftarrow x > 2 \end{cases} \text{ para } x=2$$

4. Estude analiticamente a continuidade de cada uma das seguintes funções:

$$4.1. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2x-3}{x+2}, & x \geq 0 \\ \frac{3x-1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

$$4.2. \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1}, & \text{se } x > 1 \\ 2x+1, & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

$$4.3. \quad h(x) = \begin{cases} \frac{3x^2+x-1}{x-2}, & x < 1 \\ 4, & x = 1 \\ \frac{x-4}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

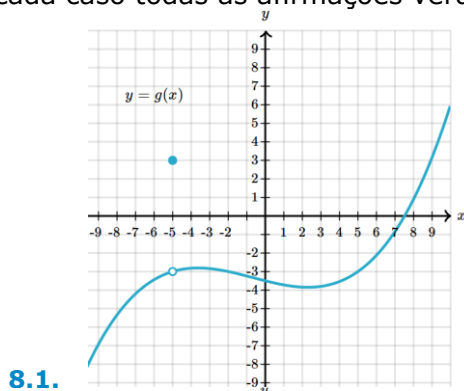
$$4.4. \quad t(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + 1, & x > 3 \\ x^3 - 2x - 5, & x \leq 3 \end{cases}$$

5. Mostre que a equação $3x^2 - 2x - 5 = 1$ tem solução no intervalo $[0, 2]$, sem a resolver.

6. Mostre que a equação $x^4 + 2 = 6x^2$ tem pelo menos uma solução em $[-3, 1]$ e outra no intervalo $[2, 5]$.

7. Mostre que a função $f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}$ atinge o valor (-2) no intervalo $[-1, 2]$.

8. Considere as funções cujos gráficos se encontram representados nas imagens. Assinale, em cada caso todas as afirmações verdadeiras (à direita de cada imagem).



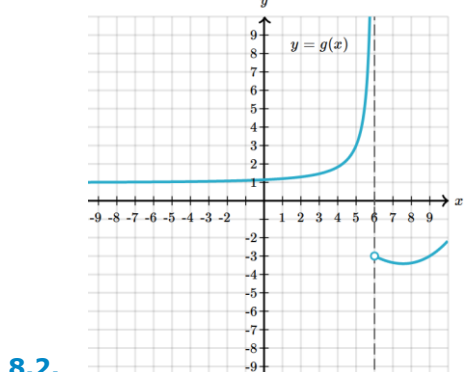
☐ A $\lim_{x \rightarrow -5^+} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -5^-} g(x)$ existem

☐ B $\lim_{x \rightarrow -5} g(x)$ existe

☐ C g é definida em $x = -5$

☐ D g é contínua em $x = -5$

☐ E Nenhuma das anteriores



☐ A $\lim_{x \rightarrow 6^+} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 6^-} g(x)$ existem

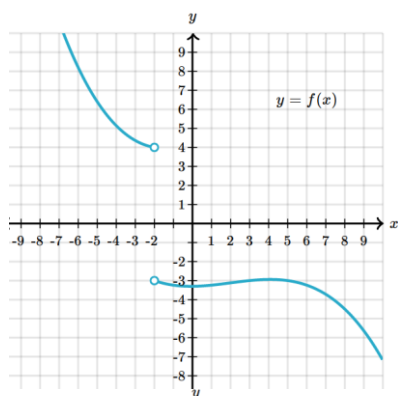
☐ B $\lim_{x \rightarrow 6} g(x)$ existe

☐ C g é definida em $x = 6$

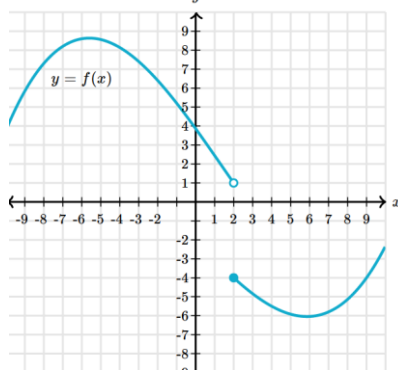
☐ D g é contínua em $x = 6$

☐ E Nenhuma das anteriores

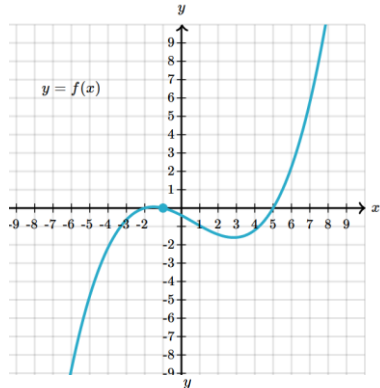
8.3.



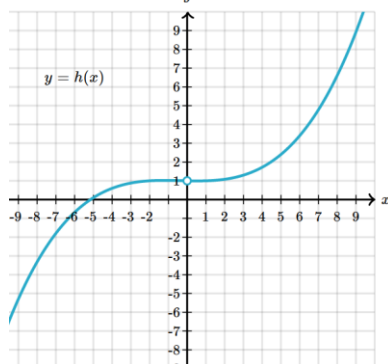
8.4.



8.5.



8.6.



☐ A $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ existem

☐ B $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ existe

☐ C f é definida em $x = -2$

☐ D f é contínua em $x = -2$

☐ E Nenhuma das anteriores

☐ A $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ existem

☐ B $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe

☐ C f é definida em $x = 2$

☐ D f é contínua em $x = 2$

☐ E Nenhuma das anteriores

☐ A $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ existem

☐ B $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ existe

☐ C f é definida em $x = -1$

☐ D f é contínua em $x = -1$

☐ E Nenhuma das anteriores

☐ A $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$ existem

☐ B $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ existe

☐ C h é definida em $x = 0$

☐ D h é contínua em $x = 0$

☐ E Nenhuma das anteriores

Fontes: Filomena Soares e Paula Nunes – 2000 - 2016 Textos de Apoio de várias UCs de Matemática – ESEIG/IPP e outros como <https://pt.khanacademy.org/math/calculus-all-old/limits-and-continuity-calc/continuity-at-a-point-calc/e/analyze-continuity-at-a-point-graphically>

Soluções:**1.**

1.1 $+\infty$

1.2 $-0,7$

1.3 $+\infty$

1.4 $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -0,5 \right)$

1.5 -2

2.

2.1 3

2.2 $\frac{4}{3}$

2.3 0

2.4 -1

2.5 0

2.6 2

2.7 6

2.8 -1

2.9 -1

2.10 $\nexists$

2.11 0

2.12 0

2.13 1

2.14 1

2.15 $+\infty$

2.16 $-\infty$

2.17 $+\infty$

2.18 $+\infty$

2.19 $-\infty$

2.20 $+\infty$

2.21 $+\infty$

2.22 $+\infty$

2.23 0

2.24 2

2.25 $-\infty$

2.26 0

2.27 $-\infty$

2.28 $+\infty$

2.29 0

2.30 0

2.31 $+\infty$

2.32 $+\infty$

2.33 $\frac{4}{3}$

2.34 $\frac{4}{3}$

2.35 $\frac{1}{2}$

2.36 $\frac{1}{2}$

2.37 0

2.38 $+\infty$

2.39 0

2.40 $+\infty$

2.41 $\nexists$

2.42 $\nexists$

2.43 -1

2.44 1

2.45 0

2.46 $\nexists$

2.47 $\nexists$

2.48 $\nexists$

2.49 $\frac{2}{3}$

2.50 4

3.

3.1 Contínua: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = \frac{5}{6}$

3.2 Contínua: $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = g(-2) = -3$

3.3 Descontínua: $\nexists \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3 \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -3$

3.4 Descontínua: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6 \neq h(2) = -3$

4.

4.1 Contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\frac{3}{2} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \right)$

4.2 Contínua em $\mathbb{R}$: $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = g(1) = 3$

4.3 Contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$: $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = -3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = -3 \neq h(1) = 4$

4.4 Contínua em $\mathbb{R}$: $\lim_{x \rightarrow 3^+} t(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} t(x) = t(3) = 16$

5. É uma equação do tipo $f(x)=1$ onde $f(x)=3x^2-2x-5$ (função contínua em $\mathbb{R}$). Como $f(0)=-5$ e $f(2)=3$ então a equação $f(x)=k$ tem pelo menos uma solução qualquer que seja o valor de $k \in]-5,3[$, em particular $k=1$.

6. $x^4+2=6x^2 \Leftrightarrow x^4-6x^2+2=0$ - equação do tipo $f(x)=0$ onde $f(x)=x^4-6x^2+2$ (função contínua em $\mathbb{R}$). Como $f(-3)>0$ e $f(1)<0$ e, por outro lado, $f(2)<0$ e $f(5)>0$ podemos concluir que a equação $x^4+2=6x^2$ tem pelo menos uma solução em $[-3,1]$ e outra no intervalo $[2,5]$.

7. A função é contínua em $[-1,2]$. Como $f(-1)=-\frac{1}{2}$ e $f(2)=-4$ então a equação $f(x)=k$ tem pelo menos uma solução qualquer que seja o valor de $k \in \left]-4, -\frac{1}{2}\right]$, em particular -2 .

8.

8.1 A,B,C

8.2 E

8.3 A

8.4 A,C

8.5 A,B,C,D

8.6 A,B