

1 Factors i desenvolupaments.

Binomi de Newton.



Fig. 3.1 Isaac Newton
(1642-1727)

L'epitafi de Newton, a l'Abadia de Westminster, a Londres, és la fórmula que expressa el binomi $a + b$ elevat a la potència m . La glòria més gran de Newton va ser obtenir, sobre la seva tomba, una fórmula algebraica.

Chafi Haddad

1.1 Productes i factors notables

Quadrat d'una suma: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Quadrat d'una diferència: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

Cub d'una suma: $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Cub d'una diferència: $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

Suma per diferència: $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

Diferència de cubs: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

Suma de cubs: $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Exercici 1.1.1 Trobeu l'error del següent raonament, suposant que $x = y$

$$\begin{aligned}x^2 &= xy \\x^2 - y^2 &= xy - y^2 \\(x + y)(x - y) &= y(x - y) \\x + y &= y \\2y &= y \\2 &= 1\end{aligned}$$

1.2 Binomi de Newton i coeficients binomials

Definició 1.2.1 (*Factorial*) Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, definim el **factorial de n** com

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

El factorial per $n = 0$ per conveni s'escriu

$$0! = 1$$

i això permet que moltes expressions tinguin una formulació més senzilla.

Definició 1.2.2 (*Binomi de Newton*) Si $n \in \mathbb{N}$, llavors

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

on els coeficients, que s'anomenen **coeficients binomials** es defineixen com

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{essent} \quad \begin{matrix} n \geq k \geq 0 \\ k \neq 0, k \neq n \end{matrix}$$

Observem que alguns dels resultats de l'apartat 1.1 són casos particulars del binomi de Newton. El desenvolupament de la fórmula del binomi es pot utilitzar per altres valors de n (enters i racionals), i aleshores apareixen les sèries infinites.

Propietat 1.2.1 (*Propietats dels coeficients binomials*)

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

$$4. \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = \binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$5. \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

$$6. \sum_{l \text{ senar}} \binom{n}{l} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}$$

$$7. \sum_{l \text{ parell}} \binom{n}{l} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1}$$

De la tercera propietat es dedueix la configuració següent, que es coneix amb el nom de *Triangle de Pascal*.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
 & \dots & & & & & & &
 \end{array}$$

Fig. 3.2 Triangle de Pascal

que tenint en compte la definició dels coeficients binomials es pot escriure com:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & \dots & & & & &
 \end{array}$$

Fig. 3.3 Triangle de Pascal

Observem que cada nombre, llevat dels que trobem als costats del triangle (que tenen valor 1), és la suma dels dos nombre que té just al damunt.

La primera vegada a la història de les matemàtiques que apareix el triangle aritmètic és al segle XIII en les obres del matemàtic xinès Yang Hui. Més endavant apareix publicat a *Mirall preciós dels Quatre Elements* de Chu Shih-Chieh (matemàtic xinès de finals del segle XIII, principis del s. XIV).

El *Mirall Preciós* (escrit al 1303) comença amb un diagrama del triangle aritmètic. En aquest diagrama apareixen els coeficients dels diferents desenvolupaments binòmics fins a la vuitena potència. Sembla que aquest teorema també el coneixia Omar Khayyam (s.XII) però l'obra àrab més antiga que l'inclou data del segle XV i està escrita per Al-Kashi. Alguns historiadors diuen que es tracta de descobriments independents perquè les comunicacions entre Xina i Aràbia no eren gaire intenses, encara que existia la ruta de la seda que connectava Xina amb Pèrsia, i la informació científica s'hi podria haver infiltrat.

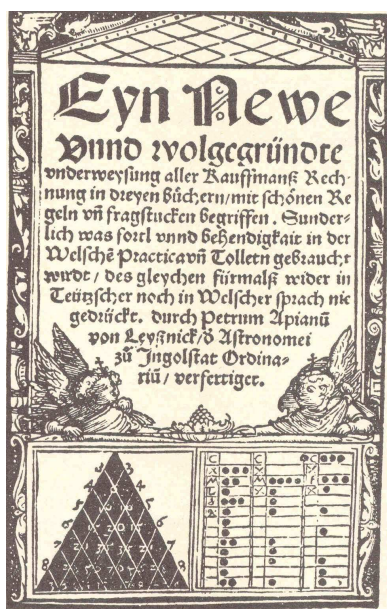


Fig. 3.4 El triangle de Pascal tal com apareix al *Ssu Yuan Yü Chien* de Chu Shih-Chieh, de l'any 1303.

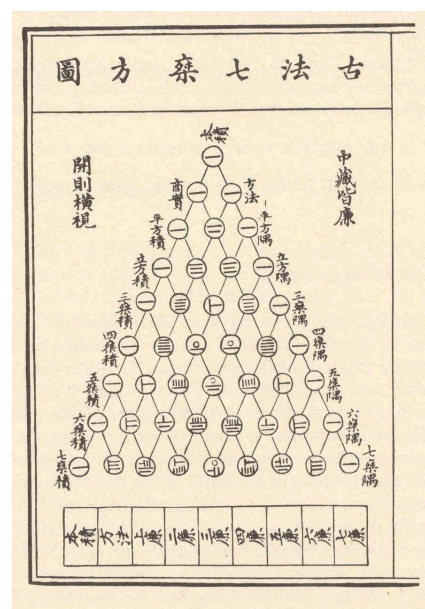


Fig. 3.5 Portada de la *Aritmètica* de Peter Apian

Al *Rechnung* de Peter Apian (1527) apareix imprès a la portada el triangle aritmètic, gairebé un segle abans del naixement de Pascal. A la *Aritmètica integra* (1544) de Michael Stifel també s'inclou el triangle aritmètic, i és important bàsicament per l'estudi dels nombres negatius, les arrels i les potències.

Al *General Tratatto* escrit a mitjans del s.XVI per *Tartaglia* (sobrenom de Niccolo Fontana) apareixen les dotze primeres potències dels nombres combinatoris (i és per això que aquest triangle també s'anomena *triangle de Tartaglia*).

Blaise Pascal (al 1654) va estudiar moltes propietats d'aquest triangle i va relacionar l'estudi de les probabilitats amb el triangle aritmètic. Des de llavors, aquesta distribució triangular s'anomena *triangle de Pascal*.

I com és que al desenvolupament

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

se l'anomena binomi de Newton?

Newton en dues cartes a Henry Oldenborg (1615-1677), secretari de la Royal Society, va generalitzar aquest desenvolupament a exponents fraccionaris. Al *Tractat del triangle aritmètic* de Pascal es veu que Pascal ho coneixia i ho aplicava (només per exponents positius), però és probable que tal com diu Carl B. Boyer a la referència [7], com Pascal no coneixia la notació exponencial introduïda per Descartes, no va poder formalitzar la generalització a exponents fraccionaris.

Per obtenir el teorema binomial, Newton no va procedir directament a partir del triangle de Pascal, sinó d'una manera indirecta a partir d'un problema de quadratures.