

Mètodes de raonament i demostració.

Proposicions i implicacions

Totes les demostracions i raonaments matemàtics es fonamenten en **proposicions**. Una proposició és un enunciat declaratiu o cadena de símbols intel·ligibles que es pot qualificar com a certa o falsa, i no pot ser certa i falsa a la vegada (principi d'exclusió). Una **tautologia** és una proposició que sempre és certa, per exemple “ $1 = 1$ ”. Una **contradicció** és una proposició que sempre és falsa, per exemple “ $0 = 1$ ”. Perquè una proposició sigui totalment clara és necessari que s'hagi establert el context adient i s'hagi definit correctament el significat dels signes.

Diem que dues proposicions p i q són **equivalents** si p és certa estrictament quan q és certa (per tant p és falsa estrictament si q és falsa). En aquest cas la notació utilitzada és: $p \equiv q$.

Si p és una proposició, aleshores la seva **negació** és la proposició “no p ” que és certa quan p és falsa i és falsa quan p és certa. Notació: $\neg p$.

Si p i q són proposicions, aleshores la seva **conjunció** és la proposició “ p i q ”, que és certa quan p i q són certes alhora i és falsa en la resta de casos. Notació: $p \wedge q$.

Així mateix, la **disjunció** de p i q és la proposició “ p o q ”, que és certa si com a mínim una de les proposicions p i q és certa, i és falsa quan ambdues són falses. Notació: $p \vee q$.

Les **lleis de De Morgan** relacionen la negació, conjunció i disjunció:

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$$

Una manera molt important de formar una nova proposició a partir de proposicions donades és la **implicació** que s'escriu $p \Rightarrow q$, “si p aleshores q ” o “ p implica q ”. En aquest cas, p és la **hipòtesi** i q és la **conclusió** de la implicació.

La implicació $p \Rightarrow q$ és equivalent a la implicació

$$\neg q \Rightarrow \neg p$$

que rep el nom de **contrarecíproc** de la implicació $p \Rightarrow q$.

Si tenim una implicació $p \Rightarrow q$, llavors també es pot formar la proposició $q \Rightarrow p$, que rep el nom de **recíproc** de $p \Rightarrow q$. Observem que el contrarecíproc és un equivalent lògic de la implicació, però el recíproc no ho és.

La **dobla implicació** (o **bicondicional**) s'escriu com " $p \Leftrightarrow q$ " o " p si i només si q " i es defineix com

$$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Leftarrow q)$$

Observem que l'equivalència $p \Leftrightarrow q$ és certa quan les proposicions p i q són ambdues certes o ambdues falses.