

Mètodes de raonament i demostració.

Demostracions per contraexemple

Per demostrar que és fals que tot element x d'un conjunt donat A té una certa propietat, és a dir, per demostrar que un enunciat del tipus

$$(\forall x \in A) \Rightarrow p(x)$$

és fals, només cal presentar un contraexemple (és a dir, un element particular x_0 del conjunt que no tingui aquesta propietat).

$$(\exists x_0 \in A) \mid \neg p(x_0)$$

Exemple: Demostreu que la composició de funcions no és commutativa, és a dir, és fals que

$$g \circ f = f \circ g$$

Demostració. Considerem $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = x^2$ i $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $g(x) = \cos x$. Aleshores,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = \cos x^2 \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\cos x) = (\cos x)^2\end{aligned}$$

Com hem trobat f i g particulars tals que

$$g \circ f \neq f \circ g$$

podem dir que en general no és cert que $g \circ f = f \circ g$ q.e.d.

Observació: “q.e.d.” es refereix a “quod erat demonstrandum”, expressió en llatí que vol dir: “el que volíem demostrar” i s’acostuma a escriure quan una demostració ha finalitzat.