

Mètodes de raonament i demostració. Demostració per inducció

El mètode de demostració per inducció és molt útil en cas de voler demostrar qualsevol fórmula que es compleixi per a tots els nombres naturals. La propietat més fonamental de \mathbb{N} és el principi d'inducció, que anem a veure tot seguit.

Per a demostrar que una proposició $p(n)$ és certa per a qualsevol nombre natural ($\forall n \in \mathbb{N}$), existeix el principi d'inducció que diu:

1. Si $p(1)$ és cert
2. Si per $n = k$ $p(k)$ certa (hipòtesi d'inducció) $\Rightarrow p(k + 1)$ certa

aleshores $p(n)$ és certa $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple: Demostreu que

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Demostració.

1. Si $n = 1$, es compleix $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$.
2. Suposem que es compleix

$$1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} \quad (\text{hipòtesi d'inducció per } k=n-1)$$

i volem veure que

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ 1 + 2 + \dots + n &= 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \\ &= \frac{(n-1)n + 2n}{2} = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Les demostracions per inducció estan molt relacionades amb les definicions recursives i com un exemple de definició recursiva podem considerar la definició de a^n com

$$\begin{aligned}a^1 &= a \\ a^{n+1} &= a^n \cdot a\end{aligned}$$