
Trobeu el volum de la regió delimitada pel con $z^2 = x^2 + y^2$ dins l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$

SOLUCIÓ:

El volum l'haurem de calcular fent la integral triple de la funció unitat sobre la regió en qüestió, d'aquesta forma cal que calculem,

$$\int \int \int_V dx \, dy \, dz$$

Subdividirem el nostre recinte en dos volums, la part corresponent a l'interior del con i per sota de la corba intersecció, que anomenarem V_1 i la part restant que anomenarem V_2 . Calculem per separat ambdós volums. El primer dels volums el calcularem realitzant un canvi a polars ja que la regió plana a integrar correspon al disc unitat centrat a l'origen i la coordenada z varia des del con fins el disc delimitat per la corba intersecció entre ambdues superfícies.

$$\begin{aligned} V_1 &= \int \int_{D(0,1)} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dx \, dy \, dz = \int \int_{D(0,1)} \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx \, dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^2) dr \, d\theta = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

El segon volum correspon a la meitat del volum de l'esfera, i així obtenim, sense necessitat d'integrar,

$$V_2 = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

D'aquesta forma obtenim que el volum total de la regió és,

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$$
