Calculeu la integral doble

$$\int\int_D \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

on D és el recinte limitat per la corba $-x^2+y^2=1$ i les rectes $x=0$ i $x=1$.

SOLUCIÓ:

Resoldrem aquesta integral en les mateixes coordenades cartesianes considerant, això sí, correctament els límits d'integració corresponents a la regió D. D'aquesta forma sabem que la corba superior que veiem a la representació gràfica representa la corba,

$$y^2 - x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{1+x^2}$$

A més a més podem comprovar que els punts d'intersecció entre la recta $x=1$ i la hipèrbola corresponen als punts $(1, \sqrt{2})$ i $(1, -\sqrt{2})$ que obtenim si igualem les dues equacions,

$$\left.\begin{array}{c} y^2 - x^2 = 1 \\ x = 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x = 1 \ ; \ y = \pm\sqrt{2}$$

D'aquesta forma la integral que se'ns presentava la podrem calcular segons,

$$\int\int_D \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 2(1+x^2)\,\mathrm{d}x = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$