
Problema: Considereu en el primer octant de \mathbb{R}^3 el sòlid A limitat pels plans de coordenades i el pla $x + y + z = 1$. Calculeu

$$\int_A \frac{1}{(x + y + z + 1)^3} dx dy dz$$

Considerant els plans de coordenades i el pla $x + y + z = 1$ tenim les restriccions $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - x$, $0 \leq z \leq 1 - x - y$ i per tant

$$\begin{aligned} \int_A \frac{1}{(x + y + z + 1)^3} dx dy dz &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{1}{(x + y + z + 1)^3} dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[-\frac{(x + y + z + 1)^{-2}}{2} \right]_0^{1-x-y} dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(-\frac{1}{2^3} + \frac{(x + y + 1)^{-2}}{2} \right) dy dx = \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{y}{2^3} - \frac{(x + y + 1)^{-1}}{2} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(\frac{x-1}{2^3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2(x+1)} \right) dx = \\ &= \left[\frac{(x-1)^2}{2^4} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \ln(x+1) \right]_0^1 = -\frac{5}{16} + \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$
