
Problema: Calculeu el volum del sòlid determinat per la intersecció de la superfície $x^2 + y^2 = 4z$ amb el recinte $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 4\}$.

La superfície $4z = x^2 + y^2$ és un paraboloides i el recinte A és l'espai del primer octant que queda per sota del pla $z = y$.

La simetria del problema suggereix treballar en coordenades cilíndriques:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{array} \right\} \quad \text{on} \quad |J| = r$$

Busquem els límits d'integració:

$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (estem al primer octant)

Expressem el paraboloides $4z = x^2 + y^2$ en coordenades cilíndriques:

$$r^2 = 4z \quad \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{r^2}{4} \\ r = 2\sqrt{z} \end{array} \right.$$

Quan $z = 4$ tenim $r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$.

Ara tenim dues opcions per fixar els límits de r i z :

$$\begin{array}{l|l} \text{Opció A} & \text{Opció B} \\ r \in [0, 4] \text{ i aleshores } z \in [\frac{r^2}{4}, 4] & z \in [0, 4] \text{ i aleshores } r \in [0, 2\sqrt{z}] \end{array}$$

Obviament, d'ambdues maneres obtenim el mateix volum:

Opció A:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \int_{r^2/4}^4 r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^4 r [z]_{r^2/4}^4 \, dr = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^4 \left(4r - \frac{r^3}{4} \right) dr = \frac{\pi}{2} \left[2r^2 - \frac{r^4}{16} \right]_0^4 = \frac{\pi}{2} [32 - 16] = 8\pi \end{aligned}$$

Opció B:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \int_0^{2\sqrt{z}} r \, dr \, dz \, d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^4 \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{2\sqrt{z}} dz = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^4 \frac{4z}{2} dz = \pi \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^4 = \pi \frac{16}{2} = 8\pi \end{aligned}$$
