

---

**Problema:** Estudieu la continuïtat de  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida per

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} \sin(xy) & x \neq 0 \\ y & x = 0. \end{cases}$$

---

Als punts  $(x, y)$  amb  $x \neq 0$  la funció és continua per estar definida com composició i operacions algebraïques de funcions contínues. Estudiem la continuïtat als punts  $(x, y) = (0, b)$ .

Si  $(x, y) = (0, b)$  amb  $b \neq 0$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,b), y \neq 0} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{xy} \sin(xy) y = b|b|$$

Com que  $f(0, b) = b$  la funció  $f$  serà discontinua als punts  $(x, y) = (0, b)$  amb  $|b| \neq 1$ .

Si  $(x, y) = (0, 0)$  aplicarem el teorema de descomposició del domini, perquè al aplicar infinèssims equivalents també hem de considerar la recta  $y = 0$  que passa pel punt  $(0, 0)$ .

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), y \neq 0} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{xy} \sin(xy) y = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), y=0} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} \sin(xy) = 0$$

Per tant,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

i això vol dir que  $f$  és continua a  $(0, 0)$ .

---