

---

**Problema:** Donada la funció  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida per

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{xy} & xy \neq 0 \\ x + y & xy = 0. \end{cases}$$

Calculeu les derivades parcials de  $f$  a  $(0,0)$ , i  $\forall v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  amb  $\|v\| = 1$  calculeu  $D_v f(0,0)$ .

---

Calculeu les derivades parcials de  $f$  a  $(0,0)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{k} = 1 \end{aligned}$$

Calculeu ara la derivada direccional  $\forall v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  amb  $\|v\| = 1$

$$D_v f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - f(0,0)}{h}$$

Si  $v_1 v_2 = 0$ ,

$$D_v f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hv_1 + hv_2}{h} = v_1 + v_2$$

Si  $v_1 v_2 \neq 0$ ,

$$D_v f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1 v_2}}{h}$$

i aquest limit no existeix.

---