

---

**Problema:** Trobeu els extrems absoluts de  $f(x, y) = xy(1 - x - y)$  al recinte quadrat de vèrtexs  $(0,0)$ ,  $(0,2)$ ,  $(2,0)$  i  $(2,2)$  incloent la frontera.

---

Anomenarem  $S$  a la regió on hem de trobar els extrems absoluts de  $f$  ( $S$  és el quadrat referit, incloent tot el seu interior). Notem que  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  en ser un polinomi (per tant, és contínua arreu), i que  $S$  és un conjunt compacte; per tant, pel Teorema de Weierstrass tenim que segur que existeixen els extrems absoluts demanats. Comencem trobant candidats a extrem a l'*interior* de  $S$  :

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} = y(1 - x - y) - x = y(1 - 2x - y) \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = x(1 - x - y) - y = x(1 - 2y - x) \end{cases}$$

Com que  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  a l'interior de  $S$ , deduïm:

$$\begin{cases} 0 = 1 - 2x - y \\ 0 = 1 - 2y - x \end{cases} \implies x = y = 1/3 \implies \underline{Z_1 = (1/3, 1/3), \text{ candidat}}$$

Analitzem ara la *frontera* de  $S$ , que té 4 trams:

$$\boxed{x=0} \quad f(x=0, y) = 0$$

$$\boxed{y=0} \quad f(x, y=0) = 0$$

$$\boxed{x=2} \quad f(x=2, y) = -2y - 2y^2 \implies 0 = \frac{f(x=2, y)}{dy} = -2 - 4y \implies y = -1/2 \notin S$$

$$\boxed{y=2} \quad f(x, y=2) = -2x - 2x^2 \implies 0 = \frac{f(x, y=2)}{dx} = -2 - 4x \implies x = -1/2 \notin S$$

Per tant, no hem trobat cap candidat a la frontera de  $S$ . Recordant que en els eixos  $x = 0$  i  $y = 0$  la funció  $f$  s'anul·la, avaluem  $f$  en els punts candidats i en els 4 vèrtexs de  $S$  (on no hem fet servir derivades):

$$\begin{cases} f(Z_1) = f(1/3, 1/3) = 1/27 \implies \underline{\text{màxim absolut}} \\ f(0, 0) = f(0, 2) = f(2, 0) = 0 \\ f(2, 2) = -12 \implies \underline{\text{mínim absolut}} \end{cases}$$


---