

---

**Problema:** Sigui  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida per

$$F(x, y, z) = \sin(ax + by + z) + e^z + x + 2y + x^2 + 3y^2$$

a) [1p] Demostreu que l'equació  $F(x, y, z) = 1$  defineix una funció implícita  $z = g(x, y)$  a un entorn del punt  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .

b) [1.5p] Calculeu els valors de  $a$  i  $b$  tals que  $dg(0, 0) = 0$ .

---

[ a ] Definim la funció

$$f(x, y, z) = F(x, y, z) - 1 = \sin(ax + by + z) + e^z + x + 2y + x^2 + 3y^2 - 1.$$

Notem que el punt  $P = (x, y, z) = (0, 0, 0)$  compleix  $f(P) = 0$  :

$$\underline{f(P) = \sin(0) + e^0 + 0 + 0 + 0 + 0 - 1 = 0}$$

Notem també que  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , ja que és la suma d'un polinomi, una exponencial, i el sinus d'un polinomi. Trobem ara les derivades parcials de  $f$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a \cos(ax + by + z) + 1 + 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = b \cos(ax + by + z) + 2 + 6y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \cos(ax + by + z) + e^z$$

(Recordem que, habitualment, de la continuïtat d'aquestes derivades parcials deduïm que  $f \in C^1$  en un entorn del punt considerat; aquí no ens cal). Per veure que es poden definir la funció  $z = g(x, y)$  a l'entorn del punt  $P$ , calcularem el següent determinant:

$$\underline{\det_1 \left( \frac{\partial f}{\partial z}(P) \right) = \frac{\partial f}{\partial z}(P) = 2 \neq 0 \implies \underline{\underline{\text{es pot definir } z = g(x, y) \text{ a l'entorn de } P}}}$$

[ b ] Cal que  $\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 0$  i  $\frac{\partial z}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0$ , que és el que imposem. Derivarem  $f$  respecte  $x, y$  en el punt donat. Derivem primer respecte de  $x$ , tenint en compte que  $\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \frac{\partial y}{\partial x} = 0$  :

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(P) + \frac{\partial f}{\partial z}(P) \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) \implies 0 = a + 1 + 0 \implies \underline{\underline{a = -1}}$$

Derivem ara respecte de  $y$ , tenint en compte que  $\frac{\partial x}{\partial y} = 0, \frac{\partial y}{\partial y} = 1$  :

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y}(P) + \frac{\partial f}{\partial z}(P) \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) \implies 0 = b + 2 + 0 \implies \underline{\underline{b = -2}}$$