
Problema: El desenvolupament en sèrie de Fourier de la funció real $f(x) = x \cos(x)$ definida a $[-\pi, \pi]$ extesa periòdicament a tota la recta real és

$$SFT(f)(x) = -\frac{\sin x}{2} + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 - 1} \sin(nx)$$

Calculeu la suma de la sèrie numèrica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{(2n+1)^2 - 1}$$

Com que en $x = \frac{\pi}{2}$ la funció f és continua, es compleix:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} &= -\frac{1}{2} + 2 \left(\frac{2}{3} \sin \pi - \frac{3}{8} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{4}{15} \sin 2\pi - \dots \right) = \\ &= -\frac{1}{2} + 2 \left(\frac{3}{8} - \frac{5}{24} + \frac{7}{48} - \dots \right) = \\ &= -\frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{(2n+1)^2 - 1} \end{aligned}$$

d'on

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{(2n+1)^2 - 1} = \frac{1}{4}$$
