

**Problema:** Trobeu la solució general del sistema d'EDOs (lineals a coeficients constants)

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y + 2z \\ y' = -x + 3y - 2z + e^{2t} \\ z' = -2x + 4y - 3z + e^{2t} \end{cases},$$

(on  $x' = dx/dt$ ,  $y' = dy/dt$ ,  $z' = dz/dt$ ).

El sistema el podem escriure com  $X' = A X + f$ , on

$$X = X(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad X' = X'(t) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad f = f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calculem el polinomi característic de  $A$  ( $\implies$  solucions característiques i multiplicitats):

$$\begin{aligned} \underline{p_A(\lambda)} &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & -2 \\ -2 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{f_1+f_2} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 3-\lambda & -2 \\ -2 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2-c_1} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & -2 \\ -2 & 6 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 6 & -3-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{*}{=} -(\lambda-1) \cdot \lambda \cdot (\lambda-1) = -(\lambda-1)^2 \lambda \end{aligned}$$

( $*$  : el determinant d'ordre 2 val  $(4-\lambda)(-3-\lambda) + 12 = \lambda^2 - \lambda - 12 + 12 = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda-1)$ ).

Lavors, a partir de  $p_A(\lambda) = 0$  :

Solucions característiques	Multiplicitats
$\lambda_1 = 1 \in \mathbb{R}$	$m_1 = 2$
$\lambda_2 = 0 \in \mathbb{R}$	$m_2 = 1$

Com veiem,  $A$  té 2 solucions característiques diferents, que són reals. Per veure si és o no diagonalitzable en  $\mathbb{R}$ , hem de comparar  $\dim V_A(\lambda_1) = \dim \text{Ker}(A - \lambda_1 I_3)$  amb  $m_1 = 2$  (ja sabem que  $\dim V_A(\lambda_2) = \dim \text{Ker}(A - \lambda_2 I_3) = m_2 = 1$ , en ser la multiplicitat igual a 1):

$\lambda_1 = 1$  :

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{f_2+f_1 \\ f_3+2f_1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \Omega_1, \quad \text{m.e.f. de rang 1}$$

Per tant:  $\dim \text{Ker}(A - I_3) = 3 - 1 = 2 = m_1 \implies \underline{A \text{ és diagonalitzable en } \mathbb{R}}$ .

Trobem ara 2 vectors linealment independents pertanyents a  $\text{Ker}(A - I_3)$  (formaran les dues primeres columnes d'una matriu invertible  $P$  que intervé en la diagonalització de  $A$ ). A partir de la darrera m.e.f. trobada ( $\Omega_1$ ):

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies a - 2b + 2c = 0 \implies a = 2b - 2c$$

Per tant els vectors de  $\text{Ker}(A - I_3)$  són del tipus  $(2b - 2c, b, c) = b(2, 1, 0) + c(-2, 0, 1)$  d'on trobem els vectors  $\vec{v}_1 = (2, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (-2, 0, 1)$  (del  $\text{Ker}(A - I_3)$ ). Estudiem ara la solució característica  $\lambda_2 = 0$ .

$\lambda_2 = 0$  :

$$A - 0 \cdot I_3 = A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (1/2)f_1 & f_2+f_1 & f_3+2f_1 & f_3-f_2 & (1/2)f_2 & f_1+f_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} (1/2)f_1 & f_2+f_1 & f_3+2f_1 & f_3-f_2 & (1/2)f_2 & f_1+f_2 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \Omega_0 ,$$

que és m.e.f. Llavors:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies a = -c/2, b = c/2 \implies \begin{matrix} \text{vectors de } \text{Ker}(A) \\ \text{són del tipus} \\ (-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}, c) = \frac{c}{2}(-1, 1, 2) , \end{matrix}$$

d'on trobem el vector  $\vec{v}_3 = (-1, 1, 2)$  (del  $\text{Ker}(A)$ ).

Posant per columnes els vectors  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  obtenim la matriu  $P$  (invertible):

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} ,$$

que compleix:

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D \text{ (matriu diagonal)}$$

I com que  $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$  (com s'obté fàcilment) ja podem calcular la matriu exponencial (notem,  $e^{0t} = 1$ ):

$$\begin{aligned} \underline{e^{tA}} &= P e^{tD} P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \left( e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= e^t \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= e^t \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Per a trobar la solució general del sistema aplicarem la fórmula de Lagrange

$$\underline{X(t) = e^{tA} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} f(s) ds, \quad \forall C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}}$$

(on prendrem  $t_0 = 0$ , que és el valor que es pren habitualment). Primer de tot, calculem la matriu a integrar:

$$\begin{aligned} \underline{e^{(t-s)A} f(s)} &= \left( e^{t-s} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \right) e^{2s} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= e^t e^{-s} e^{2s} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2s} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= e^t e^s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{e^t e^s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

Llavors, tenint present que

$$\int_0^t e^t e^s ds = e^t \int_0^t e^s ds = e^t [e^s]_0^t = e^t (e^t - 1) = e^{2t} - e^t :$$

$$\underline{\int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds} = (e^{2t} - e^t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} - e^t \\ e^{2t} - e^t \end{bmatrix}}$$

Finalment, emprant la fórmula de Lagrange, obtenim per a la solució general del sistema :

$$\underline{\underline{X(t) = \left( e^t \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} - e^t \\ e^{2t} - e^t \end{bmatrix}, \quad \forall C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R},}}$$

que també podem expressar com:

$$\underline{\underline{\begin{cases} x(t) = (-1 + 2e^t)C_1 + (2 - 2e^t)C_2 + (-2 + 2e^t)C_3 \\ y(t) = (1 - e^t)C_1 + (-2 + 3e^t)C_2 + (2 - 2e^t)C_3 + e^{2t} - e^t \\ z(t) = (2 - 2e^t)C_1 + (-4 + 4e^t)C_2 + (4 - 3e^t)C_3 + e^{2t} - e^t \end{cases}, \quad \forall C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}}}}$$